

宇宙地球物理学実験（気象学分野） 大気の安定度の解析（予習資料）

1. 乾燥大気の安定度

大気中を空気塊が上昇すると、周囲の気圧の低下とともに膨張する。このとき、空気塊は断熱膨張するので、周りの空気に対して仕事をした分だけ熱エネルギーが減少し、空気塊の温度は低下する。逆に、空気塊が下降すると断熱圧縮されるので、温度は上昇する。飽和に達していない空気塊が断熱的に上昇するときの温度低下の割合を**乾燥断熱減率**という。

ここで、大気の乾燥断熱減率を計算してみよう。まず、大気が理想気体であることを仮定すると、状態方程式は、圧力を p 、比容を α 、温度を T 、気体定数を R として、

$$p\alpha = RT \quad (1)$$

と書ける。乾燥空気に対しては $R = 287 \text{ J/kg K}$ である。一方、熱力学の第 1 法則は、内部エネルギーを U 、気体に加えた熱を $d'Q$ 、気体が外部にした仕事を $d'W$ として、

$$d'Q = dU + d'W \quad (2)$$

と表せる。ここで、 $U = C_v T$ 、 $d'W = p d\alpha$ とすると、

$$d'Q = C_v dT + p d\alpha \quad (3)$$

と書くことができる。ただし、 C_v は乾燥空気の定積比熱である。(1)より、 $R dT = p d\alpha + \alpha dp$ だから、

$$d'Q = (C_v + R) dT - \alpha dp = C_p dT - \alpha dp \quad (4)$$

と変形できる。ただし、 C_p は乾燥空気の定圧比熱であって、 $C_p = 1004 \text{ J/kg K}$ である。断熱膨張や断熱圧縮を考えているので、 $d'Q = 0$ とすると、

$$C_p dT - \alpha dp = 0 \quad (5)$$

となる。

$$C_p \frac{dT}{dz} - \alpha \frac{dp}{dz} = 0 \quad (6)$$

一方、静水圧平衡の関係より、

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g \quad (7)$$

が成り立っている。ただし、 ρ は気体の密度である。また、 g は重力加速度であって、

$g = 9.81 \text{ m/s}^2$ である。ゆえに、

$$C_p \frac{dT}{dz} + g = 0$$

となつて、乾燥大気の断熱減率 Γ_d は

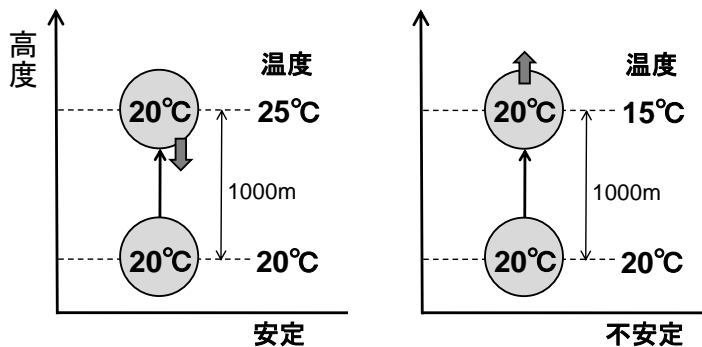
$$\Gamma_d = -\frac{dT}{dz} = \frac{g}{C_p} \quad (8)$$

となる。実際の地球大気においては、乾燥断熱減率は、100mにつき約 1.0°C である。

- ☞ 高等学校の地学で乾燥断熱減率を取り上げる。上記のような理論的な導出は行なわないが、定量的な値を具体的に取り扱う。中学校の第2分野では、断熱膨張による気温の低下を定性的に扱う。

2. 温位

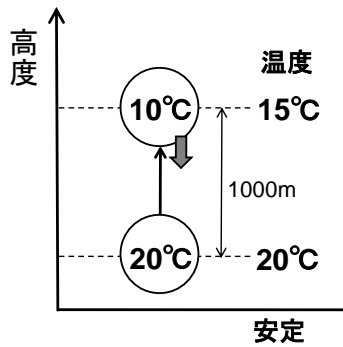
水のような、圧力変化による膨張や圧縮がほとんど生じない流体[†]の場合、鉛直方向の安定度は温度によって評価できる。左の図のように上に行くほど温度が高い場合を考える。水塊を持ち上げると、持ち上げられた水塊の温度はまわりの温度よりも低くなる。このため、水塊の密度が大きくなり、下向きの力を受ける。このように変位に対して復元力がはたらくので、このような温度成層は安定であるといえる。一方、右の図のように上に行くほど温度が低い場合には、水塊を持ち上げると、持ち上げられた水塊の温度はまわりの温度よりも高くなり、浮力を受ける。変位をさらに大きくする方向に力がはたらくので、このような温度成層は不安定であるといえる。



つまり、圧縮性のない流体の場合、上に行くほど温度が高くなっていれば安定、低くなっていれば不安定である。

[†]厳密には水にも圧縮性があり、高圧の場合には、圧縮による温度変化を無視できない。

では、圧縮性のある空気の場合はどうであろうか。図のように 1000m 上空で温度が 5°C 低くなっている状況を考える。 20°C の空気塊を 1000m 上に持ち上げると乾燥断熱減率にしたがって気温が低下し 10°C になる。このため、持ち上げられた空気塊はまわりの空気の温度よりも重くなり、下向きの力を受けることになる。したがって、このような大気の温度成層は安定である。



このことから分かるように、圧縮性のない場合は鉛直運動について温度が保存するが、圧縮性がある場合には保存しないので、単純に温度を比較だけでは大気の安定度を評価することができない。そこで、断熱という条件のもとで、圧力が変化しても保存するような温度に代わる新しい保存量を定義してみよう。そのような物理量を用いると、大気の安定度を直接評価できるので便利である。断熱という条件のもとで成り立っている(5)式を変形すると、

$$\frac{dT}{T} - \frac{R}{C_p} \frac{dp}{p} = 0 \quad (9)$$

と書くことができる。(9)式の両辺を積分すると、

$$\log T - \frac{R}{C_p} \log p = C'' \quad (C'' \text{ は定数}) \quad (10)$$

両辺の指数関数を計算すると、

$$T \times p^{-\frac{R}{C_p}} = C' \quad (C' \text{ は定数}) \quad (11)$$

(11)式は、基準となる気圧の値 p_0 を適当に定めて、

$$T \left(\frac{p}{p_0} \right)^{-\frac{R}{C_p}} = C \quad (C \text{ は定数}) \quad (12)$$

と書くこともできる。(12)式は、断熱変化に対して、左辺が一定値であることを示している。したがって、新しい物理量 θ を

$$\theta = T \left(\frac{p}{p_0} \right)^{-\frac{R}{C_p}} \quad (13)$$

と定義すれば、 θ は断熱変化（断熱圧縮・膨張）に対して保存する量である。この θ を**温位**という。通常、 p_0 は 1000hPa とする。

問1 (1) 温位 $\theta = T \left(\frac{p}{p_0} \right)^{-\frac{R}{C_p}}$ について、 $d\theta = 0$ という条件を与えることによって、 $\frac{dT}{dp}$ を求めよ。ただし、理想気体の状態方程式を用いてよい。

(2) さらに、静水圧平衡の関係を適用することによって、 $\frac{dT}{dz}$ を求めよ。

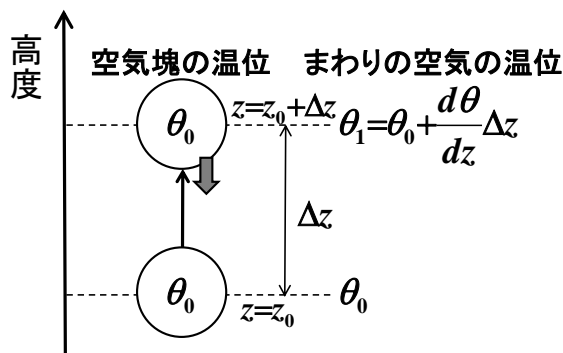
問2 以下のような高層気象観測データについて、各気圧面での温位[K]を計算せよ。0℃は273.15Kである。また、気体定数と定圧比熱の比は、 $R/C_p = 2/7$ としてよい。解答は表で示すこと。

気圧[hPa]	高度[m]	気温[℃]
1007.6	31	25.1
1000	98	24.5
925	782	22.2
850	1515	18.3
700	3156	9.9
500	5885	-4.4
400	7611	-15.2
300	9722	-28.9

(気象庁のウェブサイトより)

3. ブラント・ヴァイサラ振動数

安定成層つまり、 $\frac{d\theta}{dz} > 0$ の場合に、空気塊の鉛直方向の運動を考える。



ある高度 z_0 で温位が θ_0 の空気塊を高度 $z_0 + \Delta z$ まで断熱的に持ち上げたとする。断熱という条件のもとでは温位は変化しないから、持ち上げられた空気塊の温位は θ_0 である。一方、まわりの空

気の温位 θ_1 は、 $\theta_1 = \theta_0 + \frac{d\theta}{dz} \Delta z$ である。持ち上げられた空気塊の密度を ρ_0 とすると、まわりの

空気の密度 ρ_1 は、空気塊の温度を T_0 、まわりの空気の温度を T_1 として、

$$\rho_1 = \rho_0 \frac{T_0}{T_1} = \rho_0 \frac{\theta_0}{\theta_1} = \rho_0 \frac{\theta_0}{\theta_0 + \frac{d\theta}{dz} \Delta z}$$

と表せる。したがって、空気塊の運動方程式は、重力と浮力を考慮して、

$$\rho_0 \frac{d^2}{dt^2} \Delta z = -\rho_0 g + \rho_0 \frac{\theta_0}{\theta_0 + \frac{d\theta}{dz} \Delta z} g$$

と書ける。この方程式を変形すると、

$$\rho_0 \frac{d^2}{dt^2} \Delta z = -\rho_0 g \frac{\frac{d\theta}{dz} \Delta z}{\theta_0 + \frac{d\theta}{dz} \Delta z}$$

となる。 $\Delta z \rightarrow 0$ とすると、 $\theta_0 + \frac{d\theta}{dz} \Delta z \rightarrow \theta_0$ だから、 θ_0 をあらためて θ と書いて、

$$\frac{d^2}{dt^2} \Delta z = -\frac{g}{\theta} \frac{d\theta}{dz} \Delta z$$

が得られる。ここで、

$$N^2 = \frac{g}{\theta} \frac{d\theta}{dz}$$

とおくと、

$$\frac{d^2}{dt^2} \Delta z = -N^2 \Delta z$$

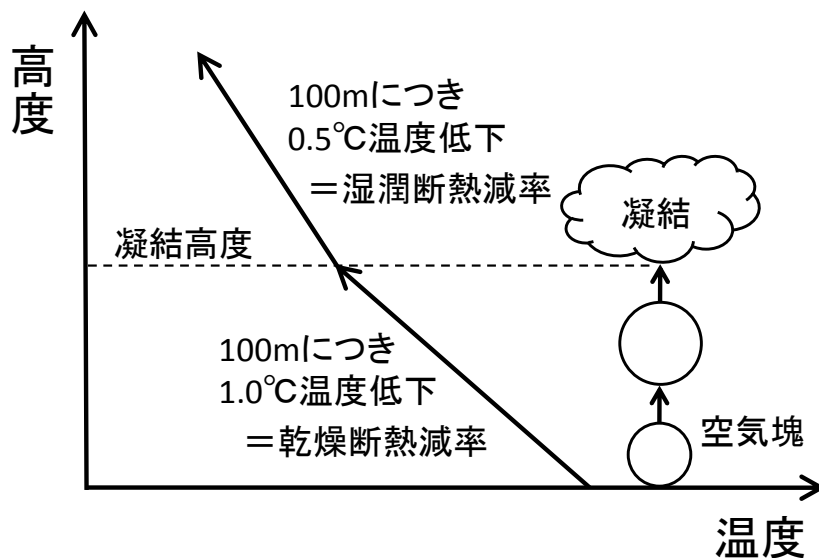
と書くことができる。この方程式は角振動数 N の単振動を表す。この N を**ブラント・ヴァイサラ振動数**という。対流圏ではブラント・ヴァイサラ振動数は $N = 1.0 \times 10^{-2}$ /s 程度の値をとることが多い。

問3 問2の高層気象観測データについて、各気圧面でのブラント・ヴァイサラ振動数を計算せよ（有効数字2桁）。差分のとりかたは各自で判断してよい（となりあう2つの指定気圧面の間の振動数を計算してもよいし、指定気圧面における振動数を両隣のデータから求めてもよい）。重力加速度は 9.81 m/s^2 とする。解答は表で示すこと。

4. 湿潤大気の安定度

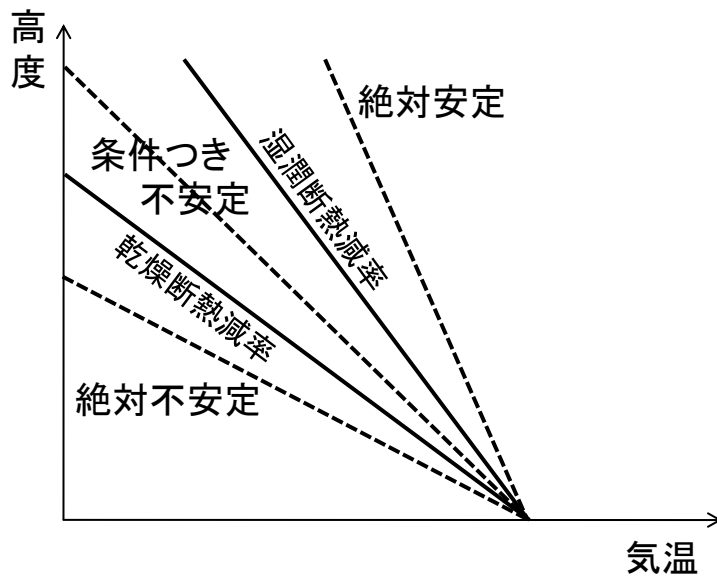
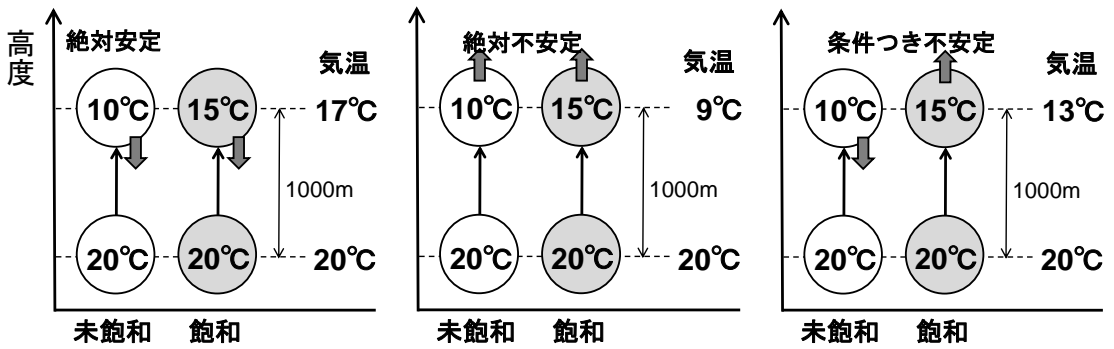
飽和に達していない空気塊を断熱的に持ち上げると、乾燥断熱減率にしたがって温度が低下していくので、ある高度で飽和に達し、水蒸気の凝結が始まる。このときの高度を**凝結高度**という。空気塊がさらに上昇を続けると、水蒸気が凝結するときに凝結熱が放出されて空気塊が暖められるので、温度の低下の割合は乾燥断熱減率よりも小さくなる。このときの温度低下の割合を**湿潤断熱減率**という。比較的高温な環境では、湿潤断熱減率は100mにつき約0.5℃である。

☞ 高等学校の地学で湿潤断熱減率を取り上げる。定量的な値のほか、乾燥断熱減率との大小関係や、その原因についても触れる。



実際の大气において、高度による温度低下の割合を**温度減率（気温減率）**という。温度減率が断熱減率よりも大きい場合、大气の状態は不安定であり、雲が発達しやすい。逆に、高度による温度低下の割合が断熱減率よりも小さい場合には、大气の状態は安定である。

大气の温度減率が湿潤断熱減率よりも小さい場合には、未飽和の空気塊に対しても飽和空気塊に対しても大气の状態は安定である。このような状態を**絶対安定（安定）**という。逆に、温度減率が乾燥断熱減率よりも大きい場合には、空気塊が未飽和であっても飽和であっても、大气の状態は不安定である。この状態を**絶対不安定（不安定）**という。また、大气の温度減率が湿潤断熱減率よりも大きく乾燥断熱減率よりも小さい場合には、未飽和の空気塊に対しては安定であるが、飽和空気塊に対しては不安定である。これを**条件つき不安定**という。実際の大气の温度減率は状況によって異なるが、典型的には下層の大气では100mにつき約0.6℃である。対流圏（高度約11kmまで）の大气は条件つき不安定であることが多い。



天気予報で「上空に寒気が入って大気の状態が不安定になるでしょう」と言うことがあるが、以上で説明したような大気の安定度の変化を指していることが多い。

問いの解答は、学籍番号と氏名を確認のうえ、実験の開始時に提出してください。