

## 9 定常ロスビー波 (3)

### 9.1 地形による強制

気候平均場で現れるような、定常的なロスビー波は、おもに、チベット高原やロッキー山脈のような大規模な山岳による地形の効果と、海と陸の温度差による熱強制の効果によって励起されている。ここでは、地形による定常的なロスビー波の励起について、強制項を伴う渦度方程式を用いて調べる。

第7章の[1]では、プリミティブ方程式系より、渦度方程式を

$$\frac{D}{Dt}\xi + \beta v = -(f + \xi) \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad [29]$$

と書いた。連続の式より

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0 \quad [30]$$

だから、[29]は

$$\frac{D}{Dt}\xi + \beta v = (f + \xi) \frac{\partial \omega}{\partial p} \quad [31]$$

と書くこともできる。

ここで、地形による渦度の強制を考える。大気上端  $p=0$  では  $\omega=0$ 、大気下端  $p=p_0$  では  $\omega=\omega_s=\vec{u}\cdot\nabla p_s$  とする。ただし、 $p_s$  は地表面気圧、 $p_0$  は  $p_s$  の代表値である。このとき、 $\frac{\partial \omega}{\partial p}$  が高度によらず一定とすれば

$$\frac{\partial \omega}{\partial p} = \frac{\omega_s}{p_0} = \frac{\vec{u}\cdot\nabla p_s}{p_0}$$

である。大気のスケールハイトを  $H$ 、地表面の標高を  $h$  とおいて

$$\frac{p_s - p_0}{p_0} = -\frac{h}{H}$$

とすると、

$$\frac{\partial \omega}{\partial p} = -\frac{\vec{u}\cdot\nabla h}{H} \quad [32]$$

となる。これを[31]に代入すると、

$$\frac{D}{Dt}\xi + \beta v = -\frac{f + \xi}{H} \vec{u}\cdot\nabla h \quad [33]$$

が得られる。

次に、基本場が定常かつ東西一様で東西風  $U$  のみが吹いているものとし、さらに、微小振幅を仮定して線形化する。[33]の右辺において、

$$f + \xi \approx f$$

$$\vec{u}\cdot\nabla \approx U \frac{\partial}{\partial x}$$

であることに注意すると、[33]は

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x}\right) \xi + \hat{\beta} v = -\frac{fU}{H} \frac{\partial}{\partial x} h \quad [34]$$

と書ける。[34]において、地表面との摩擦による渦の減衰の効果を考慮に入れると、

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x}\right) \xi + \hat{\beta} v = -\frac{fU}{H} \frac{\partial}{\partial x} h - \frac{\xi}{\tau} \quad [35]$$

となる。τは減衰の時間スケールである。流線関数ψを用いれば、[35]は

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \psi + \hat{\beta} \frac{\partial}{\partial x} \psi = -\frac{fU}{H} \frac{\partial}{\partial x} h - \frac{1}{\tau} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \psi \quad [36]$$

と表すこともできる。これが、東西一様な西風場における、地形による強制の効果を含んだ渦度方程式である。さらに、定常を仮定すれば、

$$U \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \psi + \hat{\beta} \frac{\partial}{\partial x} \psi = -\frac{fU}{H} \frac{\partial}{\partial x} h - \frac{1}{\tau} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \psi \quad [37]$$

が得られる。

[37]において、与えられた地形hに対する流線関数ψを求めてみる。簡単のため、ψは南北一様と仮定する。

$$U \frac{\partial^3}{\partial x^3} \psi + \hat{\beta} \frac{\partial}{\partial x} \psi = -\frac{fU}{H} \frac{\partial}{\partial x} h - \frac{1}{\tau} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi \quad [38]$$

ここで、波数kの東西方向に波型の地形を考えて、

$$\begin{aligned} \psi &= \hat{\psi} \exp[ikx] \\ h &= \hat{h} \exp[ikx] \end{aligned} \quad [39]$$

とおく。ψ̂、ĥは定数である。[39]を[38]に代入すると、

$$\begin{aligned} -ik^3 U \hat{\psi} + ik \hat{\beta} \hat{\psi} &= -ik \frac{fU}{H} \hat{h} + k^2 \frac{1}{\tau} \hat{\psi} \\ \left(k^2 U - \hat{\beta} - i \frac{k}{\tau}\right) \hat{\psi} &= \frac{fU}{H} \hat{h} \end{aligned}$$

となって、

$$\hat{\psi} = \frac{1}{k^2 U - \hat{\beta} - i \frac{k}{\tau}} \frac{fU}{H} \hat{h} \quad [40]$$

が得られる。[40]は地形による強制に対する渦度場の応答を表している。

[40]において、τが十分に大きく、減衰の効果は小さいとする。地形の東西波数kが定常ロスビー波の東西波数 $\sqrt{\frac{\hat{\beta}}{U}}$ よりも大きいとき、[40]は

$$\hat{\psi} \simeq \frac{1}{k^2 U - \hat{\beta}} \frac{fU}{H} \hat{h}$$

となり、ĥとψ̂は同符号となる。これは、標高の高い場所で高気圧性の渦になることを

示している。逆に、 $k$ が $\sqrt{\frac{\hat{\beta}}{U}}$ よりも小さいとき、[40]は

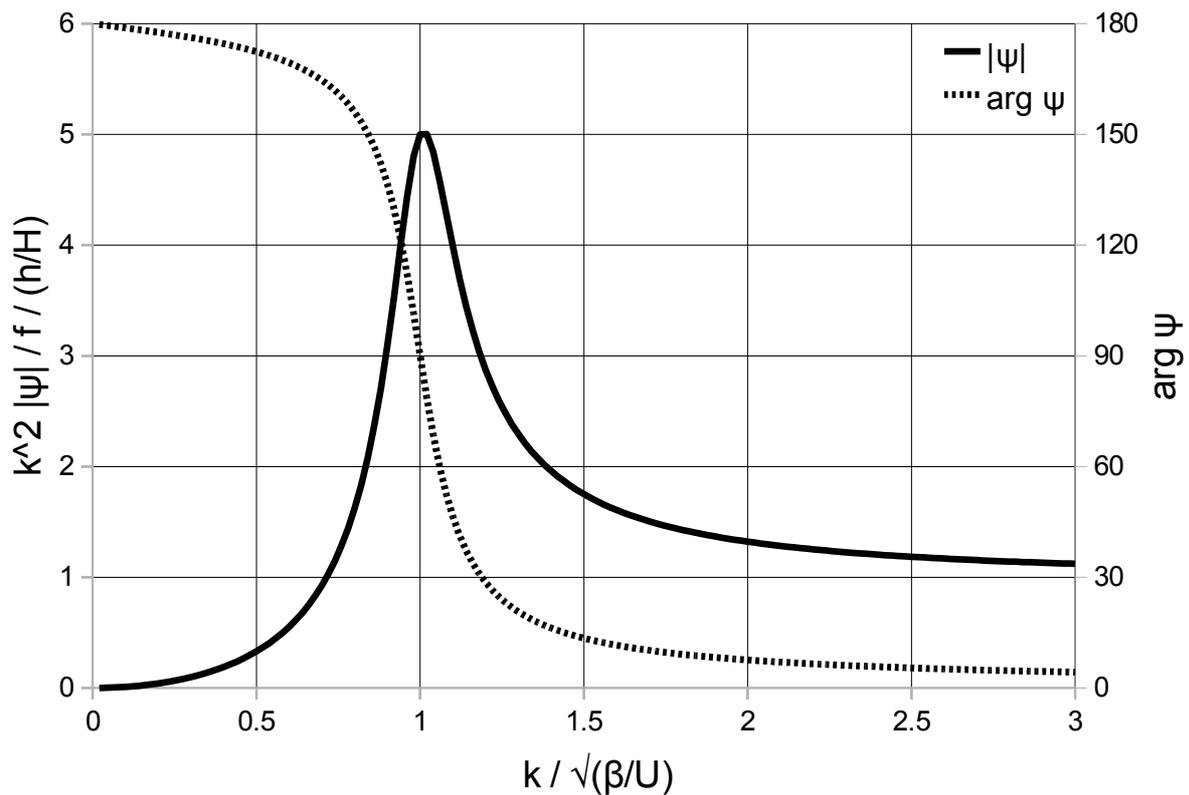
$$\hat{\psi} \simeq -\frac{1}{\hat{\beta} - k^2 U} \frac{fU}{H} \hat{h}$$

となり、 $\hat{h}$ と $\hat{\psi}$ は逆符号となる。これは、標高の高い場所で低気圧性の渦になることを示している。 $k$ が $\sqrt{\frac{\hat{\beta}}{U}}$ にほぼ等しい値をもつとき、つまり、地形の波数が定常ロスビー波

の波数にほぼ等しいときには、[40]において、 $k$ と $\sqrt{\frac{\hat{\beta}}{U}}$ が互いに相殺して、

$$\hat{\psi} \simeq i \frac{\tau}{k} \frac{fU}{H} \hat{h}$$

となり、 $\hat{\psi}$ の絶対値は非常に大きくなる。また、 $\hat{h}$ と $\hat{\psi}$ は位相が90度ずれる。渦度方程式[38]においては、左辺の第1項（東西移流項）と第2項（ベータ項）の和がほぼゼロとなり、右辺の第1項（強制項）と第2項（減衰項）がたがいに相殺している。これは共鳴の状態である。このように、地形の水平スケールが定常ロスビー波の水平スケールに近いときには、振幅の大きな応答が現れる。



地形の東西波数と、応答の振幅、位相差との関係

**参考文献：**

- Hoskins, B. J., and T. Ambrizzi, 1993: Rossby wave propagation on a realistic longitudinally varying flow. *J. Atmos. Sci.*, **50**, 1661-1671.
- James, I. N., 1994: *Introduction to Circulating Atmospheres*. Cambridge Univ. Press, 422pp.
- Plumb, R. A., 1985: On the three-dimensional propagation of stationary waves. *J. Atmos. Sci.*, **42**, 217-229.
- Takaya, K., and H. Nakamura, 2001: A formulation of a phase-independent wave-activity flux for stationary and migratory quasigeostrophic eddies on a zonally varying basic flow. *J. Atmos. Sci.*, **58**, 608-627.