気象学特論（ａｂ）　参考資料

７　渦度方程式

第 6 章で導出したプリミティブ方程式系を用いて、総観規模、全球規模の大気の運動について考えてみる。このような大きな空間スケールでの大気の運動においては、鉛直方向の運動よりも水平方向の運動のほうがずっと大きい。さらに、水平方向の運動の中では、収束、発散は相対的に小さく、低気圧や高気圧で見られるような渦、つまり回転成分のほうが卓越している。以下では、大気の運動の回転成分に着目して大気の運動を論じる。

第 6 章の(1)、(2)より、

$$\frac{\partial}{\partial t}u + u\frac{\partial}{\partial x}u + v\frac{\partial}{\partial y}u + \omega\frac{\partial}{\partial p}u = fv - \frac{\partial \Phi}{\partial x} + F_x \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}v + u\frac{\partial}{\partial x}v + v\frac{\partial}{\partial y}v + \omega\frac{\partial}{\partial p}v = -fu - \frac{\partial \Phi}{\partial y} + F_y \tag{2}$$

(1)を y で偏微分し、(2)を x で偏微分すると、

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + \omega\frac{\partial}{\partial p}\right)\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial p}\\ &= f\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{df}{dy}v - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\Phi + \frac{\partial}{\partial y}F_x\end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + \omega\frac{\partial}{\partial p}\right)\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial p}\\ &= -f\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\Phi + \frac{\partial}{\partial x}F_y\end{aligned} \tag{4}$$

(4)－(3)より、

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + \omega\frac{\partial}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial p} - \frac{\partial \omega}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial p}\right)\\ &= -f\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) - \frac{df}{dy}v + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\end{aligned} \tag{5}$$

ここで、相対渦度 ξ を

$$\xi = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \tag{6}$$

と定義し、さらに、

$$\beta = \frac{df}{dy} \tag{7}$$

とすると、

$$\frac{D}{Dt}\xi + \beta v = -(f+\xi)\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial \omega}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial p} - \frac{\partial \omega}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial p}\right) + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right) \tag{8}$$

(8)の左辺第2項はベータ項とよばれ、惑星渦度の南北移流の効果を表している。右辺第 1 項は発散項である。$(f+\xi)$は惑星渦度と相対渦度の和であり、絶対渦度とよばれる。$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)$は水平発散である。右辺第 2 項は傾斜項である。全球規模、総観規模では、この項の寄与は小さく無視できる。右辺第 3 項は粘性項である。

(8)で傾斜項と粘性項を無視すると、

$$\frac{D}{Dt}\xi + \beta v = -(f+\xi)\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) \tag{9}$$

となる。ここで、水平風が発散成分を含まない、つまり、$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ と仮定する。このとき、水平風(u,v)は流線関数Ψを用いて、

$$u = -\frac{\partial \Psi}{\partial y},\ v = \frac{\partial \Psi}{\partial x} \tag{10}$$

と表すことができ、相対渦度ξは、

$$\xi = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\Psi \tag{11}$$

と書ける。したがって、(9)は

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\Psi + \beta\frac{\partial}{\partial x}\Psi = 0 \tag{12}$$

と表せる。中緯度の対流圏では西風が卓越する。西風基本場での大気の運動を考える場合であれば、(12)は

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+U\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\Psi+\beta\frac{\partial}{\partial x}\Psi=0 \tag{13}$$

と書くことができる。

(13)において、波型の解を仮定して、

$$\Psi=\hat{\Psi}\exp\left[i\left(kx+ly-\omega t\right)\right] \tag{14}$$

とすると、

$$\left(\omega-Uk\right)\left(k^2+l^2\right)+\beta k=0$$

つまり、

$$\omega=Uk-\frac{\beta k}{k^2+l^2} \tag{15}$$

となる。定常解、つまり位相速度 $\frac{\omega}{k}$ がゼロである解を考えて、$\frac{\omega}{k}=0$ とすると、

$$k^2+l^2=\frac{\beta}{U} \tag{16}$$

となる。これが**定常ロスビー波**の分散関係式である。全球規模の大気の運動を傾圧不安定波の時間スケールよりもじゅうぶんに長い時間で時間平均すると、定常ロスビー波を検出することができる。

８　準地衡方程式系

中緯度では、大きな空間スケールでの大気の運動においては、地衡風平衡が近似的に成り立っている。つまり、水平風の地衡風成分は、非地衡風成分よりも大きい。第 6 章で導出したプリミティブ方程式系において、この条件を用いて、総観規模の大気の運動を記述する方程式系を導出する。

第 6 章の(1)、(2)より、

$$\frac{\partial}{\partial t}u + u\frac{\partial}{\partial x}u + v\frac{\partial}{\partial y}u + \omega\frac{\partial}{\partial p}u = fv - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}v + u\frac{\partial}{\partial x}v + v\frac{\partial}{\partial y}v + \omega\frac{\partial}{\partial p}v = -fu - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \tag{2}$$

ただし、粘性項は無視している。ここで、(1)、(2)の各項の大きさを見積もることを考える。まず、対象としている現象の代表的な空間スケールを L 、風速の代表的なスケールを U とする。総観規模の温帯低気圧や移動性高気圧を対象にする場合、

$$L \approx 10^6 \text{ m}, \quad U \approx 10 \text{ m/s} \tag{3}$$

である。また、中緯度においては、コリオリ係数 f は、

$$f \approx 10^{-4} \text{ /s} \tag{4}$$

である。したがって、左辺の時間変化項と移流項の代表的スケールは、

$$\frac{U^2}{L} \approx 10^{-4} \text{ m/s}^2 \tag{5}$$

右辺第 1 項のコリオリ項の代表的スケールは、

$$fU \approx 10^{-3} \text{ m/s}^2 \tag{6}$$

地衡風平衡が近似的に成り立っているので、右辺第 2 項の気圧傾度項も同じスケールである。

以上のスケールの評価において、コリオリ項に対する、時間変化項や移流項の比をロスビー数という。ロスビー数 R_o は、

$$R_O = \frac{U^2 / L}{fU} = \frac{U}{fL} \tag{7}$$

と定義できる。ロスビー数が小さいほど、地衡風平衡がよく成り立っているといえる。中緯度では、$R_o \approx 0.1$ である。

ここで、u、vを地衡風成分u_g、v_gと非地衡風成分u_a、v_aに分けて考える。つまり、

$$u_g = -\frac{1}{f_0}\frac{\partial \Phi}{\partial y}, \ v_g = \frac{1}{f_0}\frac{\partial \Phi}{\partial x} \tag{8}$$

とする。ただし、コリオリ係数としては、代表的緯度での値f_0を用いている。

このように定義したu_g、v_gを用いて、u、vを

$$u = u_g + u_a, \ v = v_g + v_a \tag{9}$$

とおく。地衡風平衡がよく成り立っているという条件のもとでは、

$$u_g >> u_a, \ v_g >> v_a \tag{10}$$

である。(1)、(2)において、左辺の時間変化項と移流項は、右辺の２つの項に比べて小さいので、地衡風成分のみを考慮して、

$$\frac{\partial}{\partial t}u + u\frac{\partial}{\partial x}u + v\frac{\partial}{\partial y}u + \omega\frac{\partial}{\partial p}u \approx \frac{\partial}{\partial t}u_g + u_g\frac{\partial}{\partial x}u_g + v_g\frac{\partial}{\partial y}u_g \tag{11}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}v + u\frac{\partial}{\partial x}v + v\frac{\partial}{\partial y}v + \omega\frac{\partial}{\partial p}v \approx \frac{\partial}{\partial t}v_g + u_g\frac{\partial}{\partial x}v_g + v_g\frac{\partial}{\partial y}v_g \tag{12}$$

と近似する。

一方、(1)、(2)の右辺において、u、vを地衡風成分と非地衡風成分に分け、さらに、

$$f \approx f_0 + \beta y \tag{13}$$

と近似すると、

$$fv - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \approx (f_0 + \beta y)(v_g + v_a) - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \tag{14}$$

$$-fu - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \approx -(f_0 + \beta y)(u_g + u_a) - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \tag{15}$$

と書けるが、f_0に比べてβyは小さいので、$\beta y v_a$、$\beta y v_a$の項を無視して、

$$fv - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \approx (f_0 + \beta y)v_g + f_0 v_a - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \tag{16}$$

$$- fu - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \approx -(f_0 + \beta y) u_g - f_0 u_a - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \tag{17}$$

とする。

(11)、(12)、(16)、(17)より、(1)、(2)は、

$$\frac{\partial}{\partial t} u_g + u_g \frac{\partial}{\partial x} u_g + v_g \frac{\partial}{\partial y} u_g = (f_0 + \beta y) v_g + f_0 v_a - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \tag{18}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} v_g + u_g \frac{\partial}{\partial x} v_g + v_g \frac{\partial}{\partial y} v_g = -(f_0 + \beta y) u_g - f_0 u_a - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \tag{19}$$

と近似できる。地衡風は非発散であり、

$$\frac{\partial}{\partial x} u_g + \frac{\partial}{\partial y} v_g = 0 \tag{20}$$

であることを用いて、(19)の x 偏微分と(18)の y 偏微分との差を計算すると、

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u_g \frac{\partial}{\partial x} + v_g \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} v_g - \frac{\partial}{\partial y} u_g \right) = -\beta v_g - f_0 \left(\frac{\partial}{\partial x} u_a + \frac{\partial}{\partial y} v_a \right) \tag{21}$$

が得られる。ここで地衡風の相対渦度 ξ_g を $\xi_g = \frac{\partial}{\partial x} v_g - \frac{\partial}{\partial y} u_g$ とおいて、(21)を変形すると

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u_g \frac{\partial}{\partial x} + v_g \frac{\partial}{\partial y} \right) (f_0 + \beta y + \xi_g) = - f_0 \left(\frac{\partial}{\partial x} u_a + \frac{\partial}{\partial y} v_a \right) \tag{22}$$

となる。さらに、(22)に対して、連続の式

$$\frac{\partial}{\partial x} u_a + \frac{\partial}{\partial y} v_a + \frac{\partial}{\partial p} \omega = 0 \tag{23}$$

を用いると、

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u_g \frac{\partial}{\partial x} + v_g \frac{\partial}{\partial y} \right) (f_0 + \beta y + \xi_g) = f_0 \frac{\partial}{\partial p} \omega \tag{24}$$

が得られる。ここで、

$$\xi_g = \frac{\partial}{\partial x} v_g - \frac{\partial}{\partial y} u_g = \frac{1}{f_0} \nabla^2 \Phi \tag{25}$$

だから、地衡流線関数 Ψ を

$$\Psi = \frac{1}{f_0} \Phi \tag{26}$$

と定義すれば、

$$\xi_g = \nabla_p{}^2 \Psi \tag{27}$$

となって、(25)は、

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+u_g\frac{\partial}{\partial x}+v_g\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(f_0+\beta y+\nabla_p{}^2\Psi\right)=f_0\frac{\partial}{\partial p}\omega \tag{28}$$

と書ける。

第 6 章の(6)より、

$$\frac{\partial}{\partial t}\theta+u\frac{\partial}{\partial x}\theta+v\frac{\partial}{\partial y}\theta+\omega\frac{\partial}{\partial p}\theta=0 \tag{29}$$

ただし、非断熱加熱を無視している。ここで、圧力 p にだけ依存する温位 θ の基本場 θ_R を定義すると、基本場の温位の鉛直勾配 $\frac{d\theta_R}{dp}$ は、温位の偏差の鉛直勾配に比べてじゅうぶんに大きいので、

$$\frac{\partial}{\partial p}\theta\approx\frac{d\theta_R}{dp} \tag{30}$$

である。さらに、水平移流項の u 、v を u_g、v_g に置き換えると、(29)は

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+u_g\frac{\partial}{\partial x}+v_g\frac{\partial}{\partial y}\right)\theta=-\omega\frac{d\theta_R}{dp} \tag{31}$$

と書ける。ここで、理想気体の状態方程式

$$p\alpha=RT \tag{32}$$

と静水圧平衡の関係

$$\frac{\partial}{\partial p}\Phi=-\alpha \tag{33}$$

を用いると、

$$T=-\frac{p}{R}\frac{\partial}{\partial p}\Phi \tag{34}$$

が導かれ、温位 θ は

$$\theta=T\left(\frac{p}{p_0}\right)^{-\frac{R}{C_p}} \tag{35}$$

だから、

$$\theta=-\frac{p}{R}\left(\frac{p}{p_0}\right)^{-\frac{R}{C_p}}\frac{\partial}{\partial p}\Phi \tag{36}$$

となる。これを(14)に代入すると、

$$
\left(\frac{\partial}{\partial t}+u_g\frac{\partial}{\partial x}+v_g\frac{\partial}{\partial y}\right)\left\{-\frac{p}{R}\left(\frac{p}{p_0}\right)^{-\frac{R}{C_p}}\frac{\partial}{\partial p}\Phi\right\}=-\omega\frac{d\theta_R}{dp} \tag{37}
$$

と書ける。ここで、θ_R が圧力 p にだけ依存し、x 、y 、t に依存しないことを考慮すると、

$$
\left(\frac{\partial}{\partial t}+u_g\frac{\partial}{\partial x}+v_g\frac{\partial}{\partial y}\right)\left\{-\frac{p}{R}\left(\frac{p}{p_0}\right)^{-\frac{R}{C_p}}\left(\frac{d\theta_R}{dp}\right)^{-1}\frac{\partial}{\partial p}\Phi\right\}=-\omega \tag{38}
$$

と変形することができる。ここで、圧力 p にだけ依存する変数 s を

$$
s^2=-\frac{R}{p}\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{R}{C_p}}\frac{d\theta_R}{dp} \tag{39}
$$

と定義すれば、(38)は、

$$
\left(\frac{\partial}{\partial t}+u_g\frac{\partial}{\partial x}+v_g\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{1}{s^2}\frac{\partial}{\partial p}\Phi\right)=-\omega \tag{40}
$$

と表せる。さらに、地衡流線関数 Ψ を用いれば、

$$
\left(\frac{\partial}{\partial t}+u_g\frac{\partial}{\partial x}+v_g\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{f_0}{s^2}\frac{\partial}{\partial p}\Psi\right)=-\omega \tag{41}
$$

が得られる。

(28)と(41)から ω を消去することを考える。まず、(41)を p で偏微分すると、

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial}{\partial t}+u_g\frac{\partial}{\partial x}+v_g\frac{\partial}{\partial y}\right)\left\{\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{f_0}{s^2}\frac{\partial}{\partial p}\Psi\right)\right\}+\left(\frac{\partial u_g}{\partial p}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial v_g}{\partial p}\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{f_0}{s^2}\frac{\partial}{\partial p}\Psi\right)\\
&=-\frac{\partial}{\partial p}\omega
\end{aligned} \tag{42}
$$

となる。ここで、

$$
u_g=-\frac{\partial\Psi}{\partial y},\ \ v_g=\frac{\partial\Psi}{\partial x} \tag{43}
$$

だから、(42)の左辺第 2 項は消去できて、

$$
\left(\frac{\partial}{\partial t}+u_g\frac{\partial}{\partial x}+v_g\frac{\partial}{\partial y}\right)\left\{\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{f_0}{s^2}\frac{\partial}{\partial p}\Psi\right)\right\}=-\frac{\partial}{\partial p}\omega \tag{44}
$$

が得られる。(44)に f_0 をかけて、(28)との和を計算すると、

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+u_g\frac{\partial}{\partial x}+v_g\frac{\partial}{\partial y}\right)\left\{f_0+\beta y+\nabla_p{}^2\Psi+\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{f_0{}^2}{s^2}\frac{\partial}{\partial p}\Psi\right)\right\}=0 \tag{45}$$

となる。ここで、

$$\frac{D_g}{Dt}\equiv\frac{\partial}{\partial t}+u_g\frac{\partial}{\partial x}+v_g\frac{\partial}{\partial y} \tag{46}$$

と定義すれば、

$$\frac{D_g}{Dt}\left\{f_0+\beta y+\nabla_p{}^2\Psi+\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{f_0{}^2}{s^2}\frac{\partial}{\partial p}\Psi\right)\right\}=0 \tag{47}$$

となる。(47)は、

$$q=f_0+\beta y+\nabla_p{}^2\Psi+\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{f_0{}^2}{s^2}\frac{\partial}{\partial p}\Psi\right) \tag{48}$$

が地衡風に沿って保存することを示している。この q を**準地衡渦位**という。

なお、鉛直座標として圧力 p の代わりに高度 z を用いると、(47)は、

$$\frac{D_g}{Dt}\left\{f_0+\beta y+\nabla_p{}^2\Psi+\frac{1}{\rho_R}\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_R\frac{f_0{}^2}{N^2}\frac{\partial}{\partial z}\Psi\right)\right\}=0 \tag{49}$$

と表せる。ただし、ρ_R は θ_R から計算される基本場の密度である。N はブラント・ヴァイサラ振動数であり、

$$N^2=g\frac{1}{\theta_R}\frac{d\theta_R}{dz} \tag{50}$$

と定義される。

９　傾圧不安定

第 8 章の(49)で、f と N は一定と仮定して、さらに ρ_R の高度変化を無視すると、

$$\frac{D_g}{Dt}\left\{ f+\nabla^2\Psi+\frac{f^2}{N^2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\Psi \right\}=0 \tag{1}$$

と書ける。(1)は、準地衡渦位

$$q=f+\nabla^2\Psi+\frac{f^2}{N^2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\Psi \tag{2}$$

が保存することを意味している。また、第 8 章の(41)を、高度座標で書きかえると、

$$\frac{D_g}{Dt}\left(\frac{f}{N^2}\frac{\partial}{\partial z}\Psi \right)=-\frac{N^2}{f}w \tag{3}$$

が得られる。

基本場において、南北風はゼロであり、東西風は東西、南北方向には一様で、鉛直シアは一定であると仮定する。このとき、基本場の地衡流線関数 Ψ_0 は、

$$\Psi_0=-\frac{\Delta U}{H}yz \tag{4}$$

と書ける。ただし、H は対象としている領域の高さ、ΔU は領域の下端と上端での東西風速の差である。

地衡流線関数の基本場からの偏差を Ψ' 、準地衡渦位の偏差を q' とすると、準地衡渦位は保存しなければならないから、時間と場所によらず、

$$q'=\nabla^2\Psi'+\frac{f^2}{N^2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\Psi'=0 \tag{5}$$

である。ここで、

$$\Psi'=\hat{\Psi}(z)\exp[i(kx+ly-\omega t)] \tag{6}$$

として、(5)に代入すると、

$$\frac{d^2}{dz^2}\hat{\Psi}=\frac{N^2\left(k^2+l^2\right)}{f^2}\hat{\Psi} \tag{7}$$

が得られる。(7)を満たす $\hat{\Psi}$ は、

$$\hat{\Psi} = A\cosh\left(\frac{z}{H_R}\right) + B\sinh\left(\frac{z}{H_R}\right) \tag{8}$$

である。ただし、

$$H_R{}^2 = \frac{f^2}{N^2\left(k^2 + l^2\right)} \tag{9}$$

である。

次に、境界条件を検討する。下端 $z = -H/2$ では、$w = 0$ である。(3)より、

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \left\{-\frac{\partial}{\partial y}\left(\Psi_0 + \Psi'\right)\right\}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial \Psi'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\right]\left\{\frac{f}{N^2}\frac{\partial}{\partial z}\left(\Psi_0 + \Psi'\right)\right\} = 0 \tag{10}$$

だから、

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial \Psi_0}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{f}{N^2}\frac{\partial}{\partial z}\Psi_0\right) \\
&+ \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial \Psi_0}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{f}{N^2}\frac{\partial}{\partial z}\Psi'\right) + \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial \Psi'}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial \Psi'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{f}{N^2}\frac{\partial}{\partial z}\Psi_0\right) \\
&+ \left(-\frac{\partial \Psi'}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial \Psi'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{f}{N^2}\frac{\partial}{\partial z}\Psi'\right) = 0
\end{aligned} \tag{11}$$

ここで、Ψ_0 の定義より、左辺第 1 項はゼロである。微小振幅を仮定すると、$\Psi' << \Psi_0$ だから、左辺第 2 項、第 3 項に比べて第 4 項はじゅうぶんに小さい。したがって、

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial \Psi_0}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{f}{N^2}\frac{\partial}{\partial z}\Psi'\right) + \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial \Psi'}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial \Psi'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{f}{N^2}\frac{\partial}{\partial z}\Psi_0\right) = 0 \tag{12}$$

である。(4)を代入すると、

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\Delta U}{2}\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial z}\Psi'\right) - \frac{\Delta U}{H}\frac{\partial}{\partial x}\Psi' = 0 \tag{13}$$

同様に、上端 $z = H/2$ においても、$w = 0$ だから、

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\Delta U}{2}\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial z}\Psi'\right) - \frac{\Delta U}{H}\frac{\partial}{\partial x}\Psi' = 0 \tag{14}$$

である。(13)、(14)に(8)を代入すると、

$$\frac{1}{H_R}\left(-\omega - k\frac{\Delta U}{2}\right)\left(-As + Bc\right) - k\frac{\Delta U}{H}\left(Ac - Bs\right) = 0 \tag{15}$$

$$\frac{1}{H_R}\left(-\omega + k\frac{\Delta U}{2}\right)(As + Bc) - k\frac{\Delta U}{H}(Ac + Bs) = 0 \tag{16}$$

ただし、

$$c = \cosh\left(\frac{H}{2H_R}\right),\quad s = \sinh\left(\frac{H}{2H_R}\right) \tag{17}$$

(15)と(16)の和と差を計算すると、

$$k\Delta U\left(\frac{1}{2}s - \frac{H_R}{H}c\right)A - \omega cB = 0 \tag{18}$$

$$\omega sA + k\Delta U\left(-\frac{1}{2}c + \frac{H_R}{H}s\right)B = 0 \tag{19}$$

(18)、(19)が $A = B = 0$ 以外の解を持つための条件は、

$$\left\{\frac{H_R}{2H}\left(c^2 + s^2\right) - \left(\frac{1}{4} + \frac{{H_R}^2}{H^2}\right)cs\right\}k^2\Delta U^2 + cs\omega^2 = 0 \tag{20}$$

だから、

$$\omega^2 = k^2\Delta U^2\left\{\frac{1}{2}\tanh\left(\frac{H}{2H_R}\right) - \frac{H_R}{H}\right\}\left\{\frac{1}{2}\coth\left(\frac{H}{2H_R}\right) - \frac{H_R}{H}\right\} \tag{21}$$

ここで、

$$K^2 = k^2 + l^2,\quad {K_R}^2 = \frac{f^2}{N^2H^2} \tag{22}$$

とおくと、

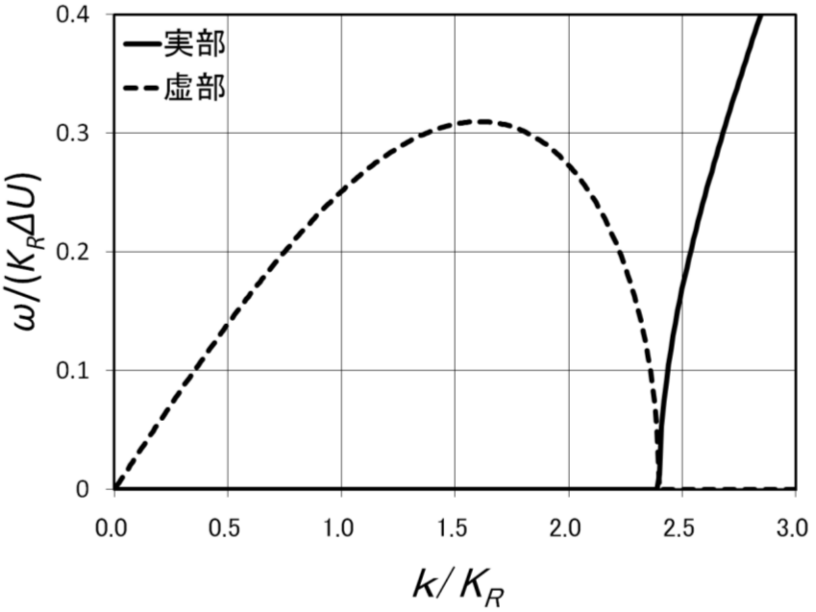
$$\omega^2 = k^2\Delta U^2\left\{\frac{1}{2}\tanh\left(\frac{K}{2K_R}\right) - \frac{K_R}{K}\right\}\left\{\frac{1}{2}\coth\left(\frac{K}{2K_R}\right) - \frac{K_R}{K}\right\} \tag{23}$$

が得られる。(23)は傾圧不安定波の分散関係を表している。

(23)で、$l = 0$ とすると、

$$\omega^2 = k^2\Delta U^2\left\{\frac{1}{2}\tanh\left(\frac{k}{2K_R}\right) - \frac{K_R}{k}\right\}\left\{\frac{1}{2}\coth\left(\frac{k}{2K_R}\right) - \frac{K_R}{k}\right\} \tag{24}$$

となる。このとき、波数 k と振動数 ω との関係を計算すると、図のようになる。



傾圧不安定波の角振動数と成長率

(24)で、$k<2.40K_R$ のときには、ω^2 が負になる。この場合、ω が虚数成分を持つので、時間とともに振幅が増大する不安定モードが存在する。成長率 σ は、$\sigma=-i\omega$ と書くことができる。σ が最大となるのは、$k=1.61K_R$ のときで、最大成長率は、$\sigma=0.31K_R\Delta U$ である。現実の中緯度の大気では、$K_R=10^{-6}$ /m 程度であるので、成長率が最大になるときの波長は約 4000km である。これは、現実の大気で見られる温帯低気圧の空間スケールとよく一致する。このときの成長率は、$\Delta U=30$ m/s とすれば、1.1 /day 程度である。

次に、成長モードの構造を調べてみる。(18)、(19)から、ω を消去すると、

$$\frac{B^2}{A^2}=\frac{\frac{1}{2}\tanh\left(\frac{H}{2H_R}\right)-\frac{H_R}{H}}{\frac{1}{2}\coth\left(\frac{H}{2H_R}\right)-\frac{H_R}{H}} \tag{25}$$

だから、

$$\frac{B^2}{A^2}=\frac{\frac{1}{2}\tanh\left(\frac{K}{2K_R}\right)-\frac{K_R}{K}}{\frac{1}{2}\coth\left(\frac{K}{2K_R}\right)-\frac{K_R}{K}} \tag{26}$$

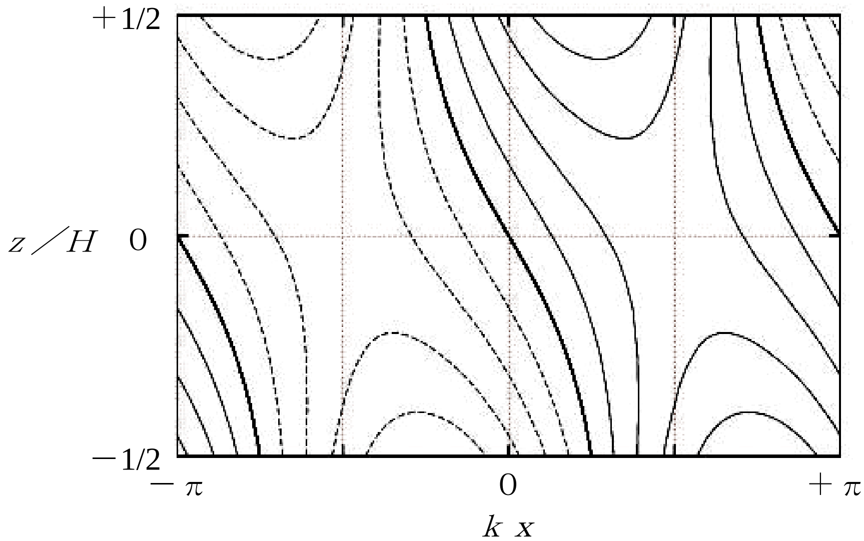
となる。$l=0$ とすると、

$$\frac{B^2}{A^2}=\frac{\frac{1}{2}\tanh\left(\frac{k}{2K_R}\right)-\frac{K_R}{k}}{\frac{1}{2}\coth\left(\frac{k}{2K_R}\right)-\frac{K_R}{k}} \tag{27}$$

(24)で、ω^2 が負のときには、$\frac{B^2}{A^2}<0$ だから、$\frac{B}{A}$ は虚数である。成長率が最大となるのは、$k=1.61K_R$ のときで、$\frac{B}{A}=1.50i$ である。これを、(6)、(8)に代入すると、地衡流線関数 Ψ' の実部は、

$$\mathrm{Re}\,\Psi'=A\exp(\sigma t)\left\{\cosh\left(\frac{z}{H_R}\right)\cos(kx)-1.50\sinh\left(\frac{z}{H_R}\right)\sin(kx)\right\} \tag{28}$$

と書くことができ、図のように空間構造を求めることができる。図をみると、上空に行くほど気圧の谷が西に傾いていることが分かる。Ψ' の空間構造から、南北風や温度偏差も計算することができ、気圧の谷の前面で暖気移流が生じ高温偏差になっていて、後面で寒気移流が生じ低温偏差になっていることが確かめられる。これらは、発達中の温帯低気圧において実際にみられる特徴である。



傾圧不安定波の流線関数の構造

以上の理論は、Eady によって 1940 年代後半に提唱されたものである。大気の下端だけでなく上端でも鉛直流がゼロであると仮定しているなど、現実的ではない部分もあるが、それでも現実の温帯低気圧の成長をよく表していると考え

られている。