# 気象学特論（ローカル気象学）

（2013 年度春学期）

目次

## １　ブシネスク方程式系

ここでは、比較的小さな空間スケールでの２次元の水平・鉛直断面で大気の運動を考える。温帯低気圧やロスビー波のような空間スケールの大きい現象に関しては、静水圧平衡を仮定して**プリミティブ方程式系**(primitive equations)を用いることができた。しかし、海陸風循環のような空間スケールが小さい現象に関しては、静水圧平衡が成り立っているとは限らない。そこで、静水圧平衡を仮定しない方程式系の導出を試みる。

### １．１　水平方向の運動方程式

水平方向の運動方程式は、**ナビエ・ストークスの方程式**(Navier-Stokes equations)より、

$$\frac{D}{Dt}u=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}p+\nu\nabla^2 u \qquad [1]$$

である。ただし、$u$ は東西風、$p$ は圧力、$\rho$ は密度、$\nu$ は粘性係数である。ここで、基本場では、風速はゼロであり、圧力は $\bar{p}$ であるとする。また、じょう乱場における圧力を $p'$ とおいて、$p=\bar{p}+p'$ とする。このとき、[1]は

$$\frac{D}{Dt}u=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}(\bar{p}+p')+\nu\nabla^2 u \qquad [2]$$

と書ける。また、基本場においても、[1]が成り立っていることを考慮すると、

$$\frac{\partial}{\partial x}\bar{p}=0 \qquad [3]$$

である。[2]、[3]より、じょう乱場における運動方程式として

$$\frac{D}{Dt}u=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}p'+\nu\nabla^2 u \qquad [4]$$

が得られる。さらに、密度 $\rho$ を基本場における密度 $\bar{\rho}$ に置き換えると、近似的に

$$\frac{D}{Dt}u=-\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial}{\partial x}p'+\nu\nabla^2 u \qquad [5]$$

と書くことができる。

### １．２　鉛直方向の運動方程式

鉛直方向の運動方程式は、ナビエ・ストークスの方程式より、

$$\frac{D}{Dt}w=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial z}p-g+\nu\nabla^2 w \qquad [6]$$

である。ただし、$w$ は鉛直風、$g$ は重力加速度である。基本場では、風速はゼロであり、圧力は $\bar{p}$、密度は $\bar{\rho}$ であるとする。$p=\bar{p}+p'$、$\rho=\bar{\rho}+\rho'$ とおくと、[6]は

$$\frac{D}{Dt}w=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial z}(\bar{p}+p')-\frac{\bar{\rho}+\rho'}{\rho}g+\nu\nabla^2 w \qquad [7]$$

と書ける。また、基本場においても、[6]が成り立っていることを考慮すると、

$$\frac{\partial}{\partial z}\bar{p}=-\bar{\rho}g \qquad [8]$$

である。これは静水圧平衡の関係である。[7]、[8]より、じょう乱場における運動方程式

として

$$\frac{D}{Dt}w = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial z}p' - \frac{\rho'}{\rho}g + \nu\nabla^2 w \qquad [9]$$

が得られる。ここで、理想気体の状態方程式が成り立ち、密度の変動は、温度偏差と圧力偏差によってもたらされるとする。圧力偏差の大きさ $\left|\frac{p'}{\bar{p}}\right|$ が温度偏差の大きさ $\left|\frac{T'}{\bar{T}}\right|$ に比べてじゅうぶんに小さいと仮定すると、密度偏差は温度偏差のみによって決まり、

$$\frac{\rho'}{\rho} \approx \frac{\dfrac{1}{\bar{T}+T'} - \dfrac{1}{\bar{T}}}{\dfrac{1}{\bar{T}+T'}} = -\frac{T'}{\bar{T}} \qquad [10]$$

となる。温位の定義より、

$$\frac{dT}{T} = \frac{d\theta}{\theta} + \frac{R}{C_p}\frac{dp}{p} \qquad [11]$$

だから、圧力偏差が温度偏差に比べてじゅうぶんに小さい場合には、

$$\frac{T'}{\bar{T}} \approx \frac{\theta'}{\bar{\theta}} \qquad [12]$$

と近似できる。[10]、[12]を[9]に代入して、

$$\frac{D}{Dt}w = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial z}p' + g\frac{\theta'}{\bar{\theta}} + \nu\nabla^2 w \qquad [13]$$

が得られる。さらに、密度 $\rho$ を基本場における密度 $\bar{\rho}$ に置き換えると、近似的に

$$\frac{D}{Dt}w = -\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial}{\partial z}p' + g\frac{\theta'}{\bar{\theta}} + \nu\nabla^2 w \qquad [14]$$

と書くことができる。

## １．３　連続の式

**連続の式**(continuity equation)は、

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0 \qquad [15]$$

と表される。[15]は、

$$\frac{1}{\rho}\frac{D}{Dt}\rho + \frac{\partial}{\partial x}u + \frac{\partial}{\partial z}w = 0 \qquad [16]$$

と書き換えることができる。ここで、じょう乱の鉛直スケールは大気のスケールハイトに比べてじゅうぶんに小さく、基本場の密度 $\bar{\rho}$ は一様であるとする。また、密度の偏差 $\rho'$ の時間変化も小さいとする。このとき、[16]の左辺第 1 項は、第 2 項、第 3 項に比べてじゅうぶんに小さいから、

$$\frac{\partial}{\partial x}u + \frac{\partial}{\partial z}w = 0 \qquad [17]$$

が得られる。鉛直方向の運動方程式では密度の偏差による浮力を考慮したが、連続の式では密度の時間変化を無視した。これが**ブシネスク近似**(Boussinesq approximation)である。

### １．４　熱力学方程式

熱拡散以外には非断熱加熱がない場合には、**熱力学方程式**(thermodynamic equation)は、

$$\frac{D}{Dt}\theta=\kappa\nabla^2\theta \tag{18}$$

と書ける。ただし $\kappa$ は熱拡散係数である。温位 $\theta$ を基本場 $\bar{\theta}$ とじょう乱場 $\theta'$ に分けると、

$$\frac{D}{Dt}\bar{\theta}+\frac{D}{Dt}\theta'=\kappa\nabla^2(\bar{\theta}+\theta') \tag{19}$$

となる。温位の基本場 $\bar{\theta}$ は高度 $z$ のみに依存し、 $z$ についての二回微分はゼロとすると、[19]は

$$\frac{D}{Dt}\theta'+w\frac{d\bar{\theta}}{dz}=\kappa\nabla^2\theta' \tag{20}$$

と書くことができる。

以上で導出した、式[5]、[14]、[17]、[20]を**ブシネスク方程式系**(Boussinesq equations)という。ブシネスク方程式系は、海陸風循環や山岳波のような比較的空間スケールの小さい現象に対して適用できる。

**課題 1. 1**　ブシネスク方程式系における運動方程式は、

$$\frac{D}{Dt}u=-\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial}{\partial x}p'+\nu\nabla^2u \qquad ①$$

$$\frac{D}{Dt}w=-\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial}{\partial z}p'+g\frac{\theta'}{\bar{\theta}}+\nu\nabla^2w \qquad ②$$

と書ける。ここで、基本場の密度 $\bar{\rho}$ は時間、空間に依存しない定数であり、 $\bar{\theta}$ は高度 $z$ のみに依存する。 $\nu$ も定数である。また、

$$\frac{\partial}{\partial x}u+\frac{\partial}{\partial z}w=0 \qquad ③$$

が成り立つ。②の $x$ 微分と①の $z$ 微分との差を計算することによって、 $x-z$ 平面上での渦度 $\left(\frac{\partial}{\partial x}w-\frac{\partial}{\partial z}u\right)$ の時間変化に関する方程式を導出せよ。