７　大気の力学（１）

７．１　コリオリ力

水平面内に気圧の差があると風が吹く原因となる。気圧の差によって空気塊にはたらく力を**気圧傾度力**[高](pressure gradient force)という。気圧傾度力は等圧線と直角に、高圧側から低圧側に向かってはたらく。しかし、天気図で見られる風向と、等圧線とのなす角は直角ではないことが多い。これは、地球の自転の影響によって、地球上を運動する空気塊に**コリオリ力**（**転向力**[高]、**コリオリの力**[高]）(Coriolis force)がはたらくためである。コリオリ力は、北半球では風の吹いていく方向に直角右向きにはたらく。南半球では直角左向きにはたらき、赤道上でははたらかない。

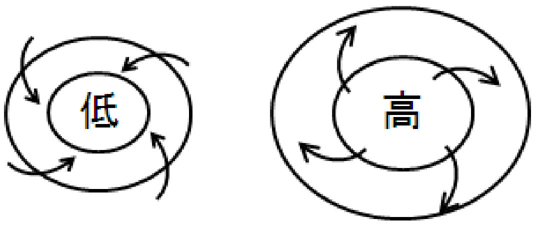

図 7-1: 低気圧や高気圧のまわりの風

コリオリ力の原理は、定性的には次のように説明することが多い。回転している台の上で、Ａは反対側のＢに向かってボールを投げるとする。台は回転しているので、台に乗っていない観測者から見ると、ボールは右にそれて飛んでいく。しかも、ＢはＡから見て左の方向に移動している。このようすを表したのが下の図（左）である。同じ実験を回転している台に乗っている観測者から見ると右の図のようになる。ボールは台に乗っていない観測者から見ればまっすぐに飛んでいるにもかかわらず、台に乗っている観測者から見ると、右の方向に曲げられ、まっすぐに飛んでいない。つまり、みかけ上、右方向に力を受けている。このみかけの力がコリオリ力である。

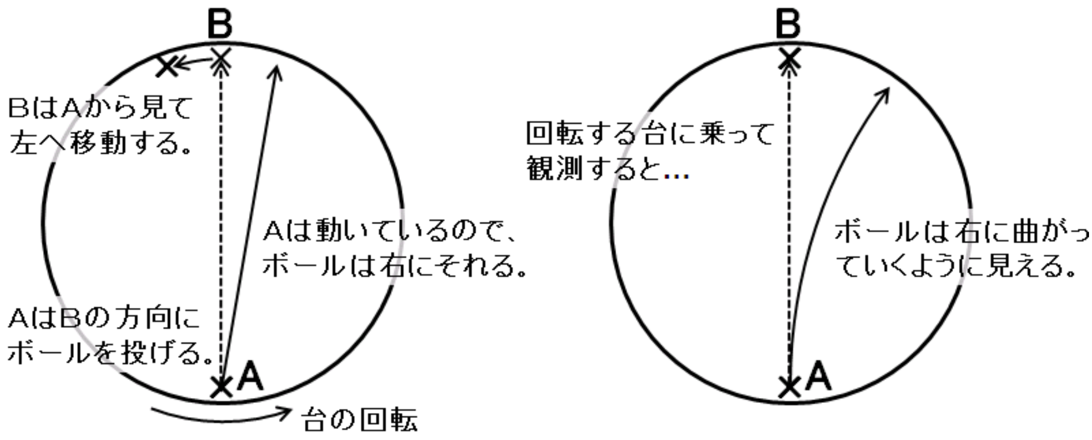

図 7-2: コリオリ力の原理

以下では、回転台の上で物体が運動したとき、物体にはたらくみかけの力を定量的に求めてみる。回転台は角速度Ωで回転していて、回転台に乗っている観測者から見た物体の速度ベクトルの動径方向の成分をu、接線方向の成分をvとする。

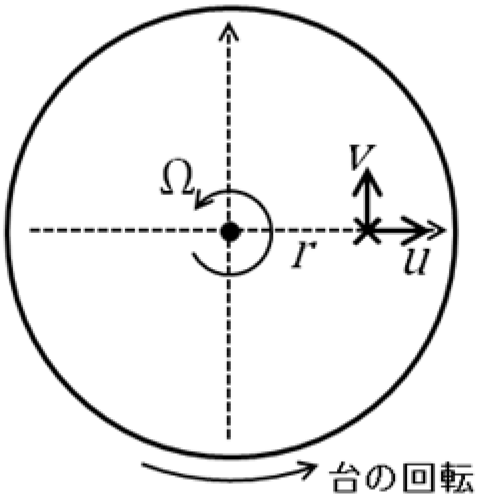

図 7-3: 回転台の上での物体の運動

はじめに、動径方向（中心から遠ざかる方向）に物体が運動するときにはたらくみかけの力を計算する。一般に、中心力（中心に向かって引く力や、中心から押す力、つまり動径方向の力）のみがはたらく場合には角運動量は一定であることが知られている。角速度Ωで回転する回転台に乗っている単位質量の物体が持つ角運動量（回転軸のまわりの角運動量）Lは、

$$L = rV$$

である。ただし、r は回転軸からの距離、V は慣性系からみた物体の速度ベクトルの接線方向（回転方向）の成分である。回転台に乗っている観測者からみた物体の速度ベクトルの接線方向の成分を v とすると、

$$V = r\Omega + v$$

だから、

$$L = r(r\Omega + v) = r^2\Omega + rv$$

である。角運動量保存則より、L は一定でなければならないから、

$$\frac{d}{dt}\left(r^2\Omega + rv\right) = 0$$

が成り立つ。ここで、合成関数の微分の公式 $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \bullet \frac{du}{dx}$ と積の微分の公式 $\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ を用いると、上の方程式は

$$2r\left(\frac{d}{dt}r\right)\Omega + \left(\frac{d}{dt}r\right)v + r\frac{d}{dt}v = 0$$

と書くことができる。速度ベクトルの動径方向の成分 u は $u = \frac{d}{dt}r$ だから、

$$(2r\Omega + v)u + r\frac{d}{dt}v = 0$$

となって、

$$\frac{d}{dt}v = -\left(2\Omega + \frac{v}{r}\right)u$$

であることが分かる。地球大気にあてはめて考えると、v/r は、風に伴う自転軸まわりの回転を表している。実際には、地球の自転に伴う回転に比べて、風に伴う回転はずっと小さいので、無視することができ、

$$\frac{d}{dt}v \cong -2\Omega u$$

である。これは、外力がはたらかなくても、動径方向の速度 u があれば、接線方向の速度 v が時間変化することを示している。つまり、接線方向にみかけの力が生じていると考えられる。単位質量の物体にはたらくみかけの力の大きさ F_v は、

$$F_v = -2\Omega u \qquad ①$$

である。

次に、接線方向に物体が運動するときにはたらくみかけの力を計算する。回転台に乗っている観測者からみて、物体が運動していない場合であっても、慣性系からみれば、物体は速さ $r\Omega$ で接線方向に運動しているので、動径方向に遠心力がはたらく。一般に遠心力の大きさは $F = m\frac{V^2}{r}$（m は物体の質量、r は回転の半径、V は回転運動の速さである）と表される。今回の場合に適用すると、単位質量あたりの遠心力の大きさは、

$$F_0 = \frac{(r\Omega)^2}{r} = r\Omega^2$$

である。回転台に乗っている観測者からみて、物体が接線方向に速さvで運動している場合を考える。このとき、遠心力は、

$$F_1 = \frac{(r\Omega + v)^2}{r} = r\Omega^2 + 2\Omega v + \frac{v^2}{r}$$

となる。観測者からみて静止していた場合との差は、

$$F' = F_1 - F_0 = r\Omega^2 + 2\Omega v + \frac{v^2}{r} - r\Omega^2 = 2\Omega v + \frac{v^2}{r} = \left(2\Omega + \frac{v}{r}\right)v$$

である。ここでも、風に伴う回転は、地球の自転に伴う回転に比べてずっと小さいので、無視することができ、

$$F' \cong 2\Omega v$$

である。これは、外力がはたらかなくても、接線方向の速度成分vがあれば、動径方向にみかけの力F_uが生じることを示していて、

$$F_u = 2\Omega v \qquad ②$$

である。

①、②より、回転軸からの距離や運動の方向に関係なく、運動の方向に対して直角右向きにみかけの力がはたらき、その大きさは、回転台の回転角速度と物体の速さとの積であることがわかる。地球の表面で考えるときには、北極であれば、回転台と回転角速度として、地球の自転角速度をそのまま用いることができる[†]。しかし、赤道では、地球の自転軸は、水平面に寝ているので、水平面上での回転はゼロである。一般に、緯度ϕにおける正味の自転角速度は、$\Omega \sin\phi$である。したがって、みかけの力は、

$$F_u = fv$$
$$F_v = -fu$$

と書ける。ただし、

$$f = 2\Omega \sin\phi$$

である。このみかけの力がコリオリ力であり、fを**コリオリ係数**(Coriolis coefficient)という。コリオリ力は、運動の方向に対して直角にはたらくので、仕事をせず、物体の速さを変えない。以上では、水平面内でのコリオリ力を考えた。極以外では鉛直流に対してもコリオリ力がはたらくが、通常は、鉛直流は水平流に比べて非常に小さいので、水平面内だけで考えればよい。

☞ 高等学校の地学で、コリオリ力を取り上げる。原理も含めて定性的に説明する。ただし、定量的な取り扱いはしない。

† 地球の自転角速度の値は、$\Omega = 7.29 \times 10^{-5}$ /s である。この値は、$2\pi / (60 \times 60 \times 24)$ /s（≒ 7.27×10^{-5} /s）とは厳密には等しくない。地球は自転と同時に公転もしているため、太陽が南中してから次に南中するまでの時間（平均太陽日）は、宇宙から見た地球から自転周期（平均恒星日）とは一致しないからである。平均恒星時は実際には平均太陽時（≒２４時間０分）よりも４分程度短い。地球の自転角速度の値としては、宇宙（慣性系）から見た地球から自転周期である平均恒星時に対応した値を用いなければならない。

問 7–1 北緯 35°において、時速 210 km で走行する列車内にいる体重 60 kg の人にはたらくコリオリ力（水平成分のみ）の大きさを有効数字２桁で求めよ。ただし、地球の自転角速度を 7.29×10^{-5} /s、sin 35°＝0.547 とする。

７．２　地衡風平衡

空気にはたらく正味の力がゼロでない場合には、加速が生じる。したがって、加速がなく定常な状態に達している空気にはたらく正味の力はゼロになっているはずである。上空では地面との摩擦が効かないので、定常な運動をする空気については、気圧傾度力とコリオリ力とのつりあいが成り立っていると考えられる。このように、気圧傾度力とコリオリ力がつりあっている風を**地衡風**[高](geostrophic wind)という。また、このつりあいを**地衡風平衡**(geostrophic balance)という。図 7-4（左）に示したように、地衡風は等圧線に平行に吹く。

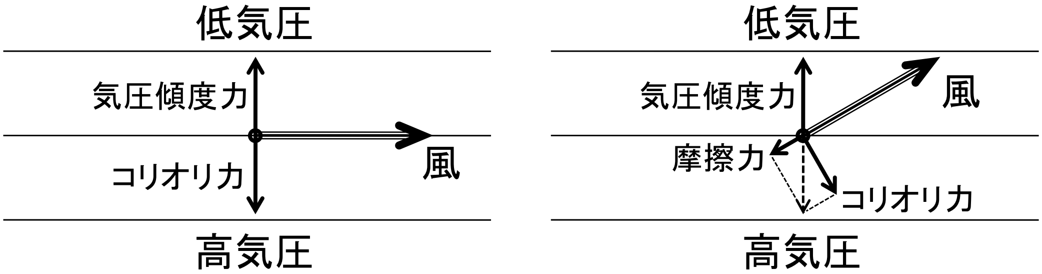

図 7-4: 地衡風（左）と摩擦がある場合の風（右）の模式図

地衡風が成り立っている場合、気圧傾度力の大きさが分かれば、地衡風の強さを計算することができる。そこで、図のような微小体積 $\Delta x\Delta y\Delta z$ の空気塊にはたらく x 方向の気圧傾度力を求めてみる。

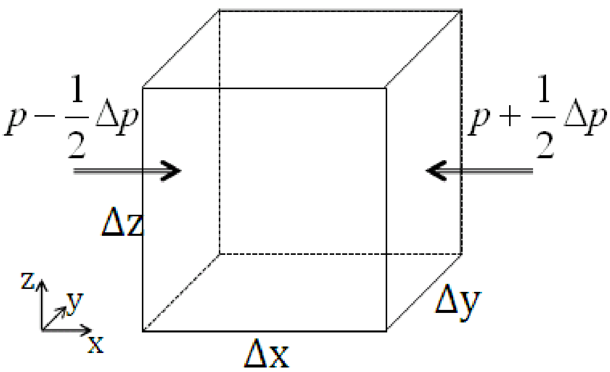

図 7-5: 気圧傾度力の模式図

右側の面では、圧力は $p+\frac{1}{2}\Delta p$ だから、右側の面全体では

$$-\left(p+\frac{1}{2}\Delta p\right)\Delta y\Delta z$$

だけの力を受けている。一方、左側の面では、圧力は $p-\frac{1}{2}\Delta p$ だから

$$\left(p-\frac{1}{2}\Delta p\right)\Delta y\Delta z$$

だけの力を受けている。したがって、この空気塊は、正味で

$$-\left(p+\frac{1}{2}\Delta p\right)\Delta y\Delta z+\left(p-\frac{1}{2}\Delta p\right)\Delta y\Delta z=-\Delta p\Delta y\Delta z$$

だけの力を受けることになる。これが気圧傾度力である。単位体積あたりの気圧傾度力は、

$$-\frac{\Delta p\Delta y\Delta z}{\Delta x\Delta y\Delta z}=-\frac{\Delta p}{\Delta x}$$

である。微分で表せば、

$$-\frac{dp}{dx}$$

となる。

一方、空気の密度を ρ、気圧勾配に垂直な風速成分を v とすると、コリオリ力は、

$$\rho fv$$

である。ふたつの力の和がゼロになればよいから、

$$-\frac{dp}{dx}+\rho fv=0$$

つまり、

$$-\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx}+fv=0 \qquad ③$$

が成り立つ。したがって、

$$v=\frac{1}{f\rho}\frac{dp}{dx}$$

である。地衡風の強さは気圧勾配の大きさに比例する。地面との摩擦がきかない上空では、実際に地衡風に近い風が吹くことが多い。

地面付近では、地面との摩擦の影響により、図 7-4（右）のように、高気圧側から低気圧側に向かって風が吹き込むようになる。この場合、気圧傾度力とコリオリ力に摩擦力を加えた 3 つの力がつりあっている。このような条件のもとでは、北半球では低気圧に向かって反時計回りに風が吹き込み、高気圧から時計回りに風が吹き出す。北半球の場合、このような条件のもとでは、図 7-1 のように、低気圧に向かって反時計回りに風が吹き込み、高気圧から時計回りに風が吹き出す。

☞ 高等学校の地学では、気圧傾度力、コリオリ力を理解したうえで、両者のつりあいとして、地衡風平衡を扱う。高等学校では、コリオリ力を定量的には扱わないので、地衡風の大きさを計算することはできないが、気圧勾配に比例する点は理解しておきたい。

☞ 高等学校の地学では、地面付近では地面との摩擦の効果により、気圧傾度力、コリオリ力、摩擦力の３つの力のつりあいが成り立っていて、高気圧側から低気圧側に風が吹くことを学ぶ。

問 7-2 地衡風について以下の問いに答えよ。
（１）北緯 30°において、気圧勾配が 100 km あたり 1 hPa のとき、地衡風の大きさを有効数字２桁で求めよ。ただし、地球の自転角速度を 7.29×10^{-5} /s、空気の密度を 1.0 kg/m^3 とする。
（２）（１）と同様の計算を北緯 45°において行なえ。

問 7-3 南半球において、地衡風の模式図（図 7-4）と同様の図を描け（気圧勾配の向きは同じとする）。

７．３　傾度風平衡

地衡風平衡は、気圧傾度力とコリオリ力のつりあいである。低気圧や高気圧

の中心付近では、空気は中心のまわりを回るように運動をするので、遠心力もはたらく。ここでは、気圧傾度力とコリオリ力に加えて、遠心力を考慮に入れた場合の力のつりあいを考える。

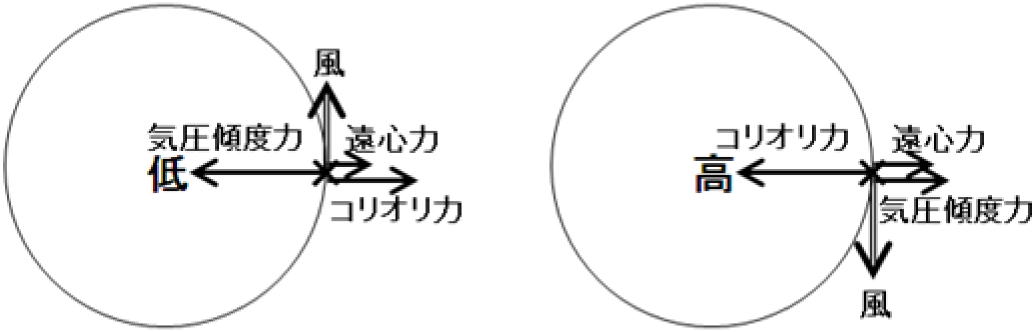

図 7-6: 傾度風の模式図

図より、低気圧の場合は、気圧傾度力と遠心力が逆向きになっていることが分かる。この２つの力の合力とコリオリ力がつりあえばよいので、気圧傾度力が同じであれば、低気圧のほうが風は弱くなる。逆に風の強さが同じであれば、それとつりあう気圧傾度力は低気圧のほうが大きい。

低気圧のまわりで、３つの力のつりあいを定量的に考える。③に遠心力の項をつけ加えると、

$$-\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx}+fv+\frac{v^2}{r}=0$$

という関係が成り立つ。このように、気圧傾度力とコリオリ力、遠心力がつりあっている風を**傾度風**[高](gradient wind)という。また、このつりあいを**傾度風平衡**(gradient wind balance)という。傾度風平衡のもとでは、気圧傾度力 F と傾度風の風速 v との関係は、

$$F=\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx}=fv+\frac{v^2}{r}$$

と書ける。ただし、$F>0$ の場合が低気圧であり、$v>0$ が反時計回り（低気圧性）の風に対応する。この関係式は

$$F=fv+\frac{v^2}{r}=\frac{1}{r}\left(v+\frac{fr}{2}\right)^2-\frac{f^2r}{4}$$

と変形することができる。下の図で太い線が傾度風、細い線が地衡風を表している。ゆるやかに気圧偏差を与えながら傾度風を生じさせた場合、実際にとり

うる値は実線で示されている範囲だけである。傾度風は低気圧側ではいくらでも強くなりうるが、高気圧側では限界があることがわかる。これは実際の気圧配置において、高気圧の強さには限度があって、極端に強い高気圧は現れないことに関係している。

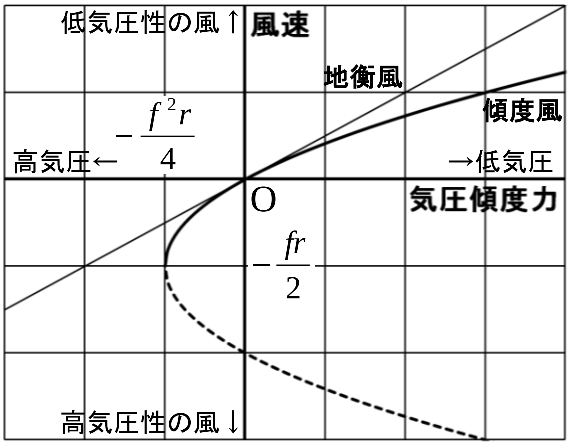

図 7-7: 気圧傾度力と傾度風

☞ 高等学校の地学で、傾度風を取り上げる。気圧傾度力、コリオリ力に加えて、遠心力のつりあいを考慮すると、低気圧と高気圧とで風が非対称になることを定性的に理解する。定量的な計算は扱わない。

問 7-4 地衡風と傾度風について以下の問いに答えよ。

（１）北緯 30°において、地衡風の風速が 10 m/s であるとする。このとき、気圧勾配は 100 km あたり何 hPa か。有効数字２桁で求めよ。ただし、地球の自転角速度を 7.29×10^{-5} /s、空気の密度を 1.0 kg/m^3 とする。

（２）北緯 30°において、軸対称な構造を持つ低気圧の中心から 500 km の地点で、傾度風の風速が 10 m/s であるとする。このとき、気圧勾配は 100 km あたり何 hPa か。有効数字２桁で求めよ。

（３）（２）と同様の計算を、高気圧の場合について行なえ。