

補講2 微分方程式の解法

課題：次のような微分方程式(differential equation)の解き方を考えてみよう。

$$\underline{\underline{\frac{1}{p} \frac{dp}{dz} = -\frac{g}{RT}}}$$

1 とりあえず解いてみよう

【手順1】両辺を z で積分しよう。

$$\int \frac{1}{p} \frac{dp}{dz} dz = -\int \frac{g}{RT} dz$$

【手順2】左辺に置換積分(integration by substitution)を適用しよう。

置換積分の公式

$$\int \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt} dt = \int \frac{dy}{dx} dx$$

$$\int \frac{1}{p} dp = -\int \frac{g}{RT} dz$$

【手順3】両辺の積分を計算しよう。

微分の公式

$$\frac{d}{dx} (\ln|x|) = \frac{1}{x}$$
$$\frac{d}{dx} (ax) = a$$

$$\ln p = -\frac{g}{RT} z + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

※ $p > 0$ なので、 $|p|$ ではなく p と書いている。

【手順4】両辺の指数をとると、

$$p = e^C \exp\left[-\frac{g}{RT} z\right] = C' \exp\left[-\frac{g}{RT} z\right] \quad (C' \text{ は正の定数})$$

2 置換積分の公式を導こう

積分は微分の逆演算だから、

$$y = \int \frac{dy}{dx} dx \quad \text{①}$$

合成関数の微分の公式の両辺を積分すると、

合成関数の微分 $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt}$
--

$$\int \frac{dy}{dt} dt = \int \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt} dt$$

左辺は微分したあとで積分しているので、結局もとの関数に戻って、

$$y = \int \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt} dt \quad \text{②}$$

①、②より、

$$\underline{\underline{\int \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt} dt = \int \frac{dy}{dx} dx}}$$

3 変数分離で解いてみよう

微分方程式が

$$(y \text{ についての式}) \frac{dy}{dx} = (x \text{ についての式})$$

という形に書かれているときには、両辺を x で積分することによって、 x と y の関係を導くことができる。このような方法を**変数分離**(separation of variables)という。

【例題】

$$x \frac{dy}{dx} - y^2 = 0 \quad (x \neq 0, y \neq 0)$$

解答例：

両辺を xy^2 で割ると、

$$\frac{1}{y^2} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$

両辺を x で積分すると、

$$\int \frac{1}{y^2} dy = \int \frac{1}{x} dx$$

$$-\frac{1}{y} = \ln x + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

$$y = -\frac{1}{\ln x + C}$$

【練習】自分で解いてみよう。

$$\textcircled{1} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \qquad \textcircled{2} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \qquad \textcircled{3} \quad x \frac{dy}{dx} + y = 0$$

$$(x > 0, y > 0)$$

略解：① $y = cx$ ，② $x^2 + y^2 = c$ ，③ $xy = c$

4 物理的な意味は？

最初の微分方程式を書き替えると、

$$\frac{\text{気圧の減る割合}}{\text{気圧}} \frac{dp}{dz} = -\frac{g}{RT} \quad \text{定数}$$

この方程式は、[気圧]と[気圧の減る割合]が比例関係にあることを示している。

☞気圧が 1000 hPa なら、高度 10 m につき 1.2 hPa の割合で気圧が低下

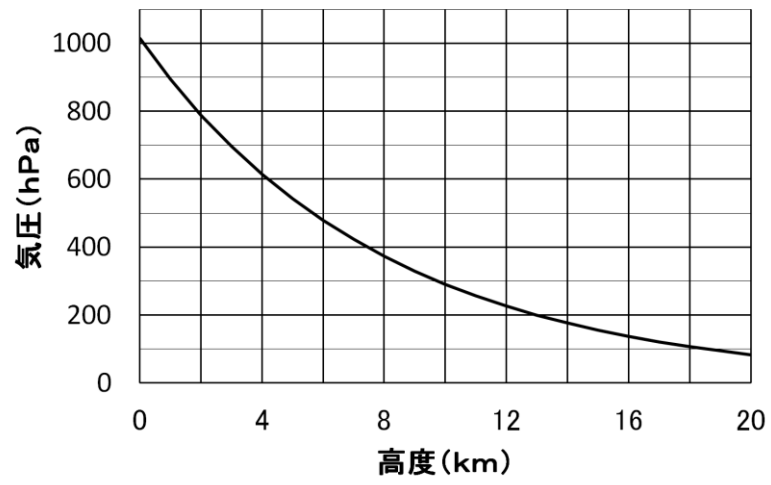
☞気圧が 900 hPa なら、高度 10 m につき 1.08 hPa の割合で気圧が低下

...

☞気圧が 500 hPa なら、高度 10 m につき 0.6 hPa の割合で気圧が低下

...

このような関係を表す関数が**指数関数**(exponential function)である。



気圧の鉛直分布の計算例

指数関数 = 変化の割合が関数の値に比例するような関数