補講２　微分方程式の解法

<u>課題</u>：次のような**微分方程式**(differential equation)の解き方を考えてみよう。

$$\underline{\underline{\frac{1}{p}\frac{dp}{dz}=-\frac{g}{RT}}}$$

１　とりあえず解いてみよう

【手順１】両辺を z で積分しよう。

$$\int\frac{1}{p}\frac{dp}{dz}dz=-\int\frac{g}{RT}dz$$

【手順２】左辺に**置換積分**(integration by substitution)を適用しよう。

置換積分の公式

$$\boxed{\int\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}dt=\int\frac{dy}{dx}dx}$$

$$\int\frac{1}{p}dp=-\int\frac{g}{RT}dz$$

【手順３】両辺の積分を計算しよう。

微分の公式

$$\frac{d}{dx}\left(\ln|x|\right)=\frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx}(ax)=a$$

$$\ln p=-\frac{g}{RT}z+C \qquad （C\text{ は積分定数}）$$

※ $p>0$ なので、$|p|$ ではなく p と書いている。

【手順４】両辺の指数をとると、

$$\underline{p=e^{C}\exp\left[-\frac{g}{RT}z\right]=C'\exp\left[-\frac{g}{RT}z\right] \quad （C'\text{ は正の定数}）}$$

２　置換積分の公式を導こう

積分は微分の逆演算だから、

$$y = \int \frac{dy}{dx} dx \qquad ①$$

合成関数の微分の公式の両辺を積分すると、

合成関数の微分

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}$$

$$\int \frac{dy}{dt} dt = \int \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} dt$$

左辺は微分したあとで積分しているので、結局もとの関数に戻って、

$$y = \int \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} dt \qquad ②$$

①、②より、

$$\underline{\underline{\int \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} dt = \int \frac{dy}{dx} dx}}$$

３　変数分離で解いてみよう

微分方程式が

$$(y\text{についての式})\ \frac{dy}{dx} = (x\text{についての式})$$

という形に書かれているときには、両辺を x で積分することによって、x と y の関係を導くことができる。このような方法を**変数分離**(separation of variables)という。

【例題】

$$x\frac{dy}{dx} - y^2 = 0 \qquad (x \neq 0,\ \ y \neq 0)$$

解答例：

両辺を xy^2 で割ると、

$$\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$

両辺を x で積分すると、

$$\int \frac{1}{y^2} dy = \int \frac{1}{x} dx$$

$$-\frac{1}{y}=\ln x+C \qquad （C\text{は積分定数}）$$

$$\underline{y=-\frac{1}{\ln x+C}}$$

【練習】自分で解いてみよう。

① $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x}$　　② $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x}{y}$　　③ $x\dfrac{dy}{dx}+y=0$

（$x>0$，$y>0$）

略解：① $y=cx$，② $x^2+y^2=c$，③ $xy=c$

4　物理的な意味は？

最初の微分方程式を書き替えると、

$$\underset{\text{気圧}}{\overset{\text{気圧の減る割合}}{}}\ \frac{dp/dz}{p}=-\frac{g}{RT}\ \text{定数}$$

この方程式は、<u>[気圧]と[気圧の減る割合]が比例関係にある</u>ことを示している。

☞気圧が 1000 hPa なら、高度 10 m につき 1.2　hPa の割合で気圧が低下

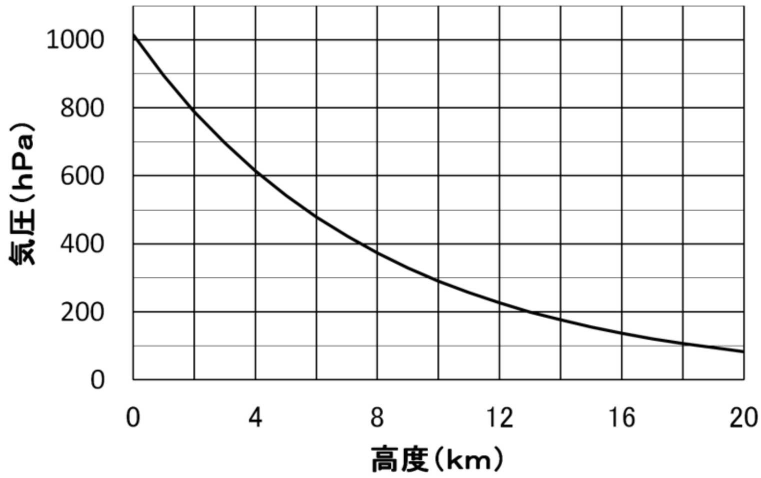
☞気圧が　900 hPa なら、高度 10 m につき 1.08 hPa の割合で気圧が低下

…

☞気圧が　500 hPa なら、高度 10 m につき 0.6　hPa の割合で気圧が低下

…

このような関係を表す関数が**指数関数**(exponential function)である。



気圧の鉛直分布の計算例

指数関数＝変化の割合が関数の値に比例するような関数