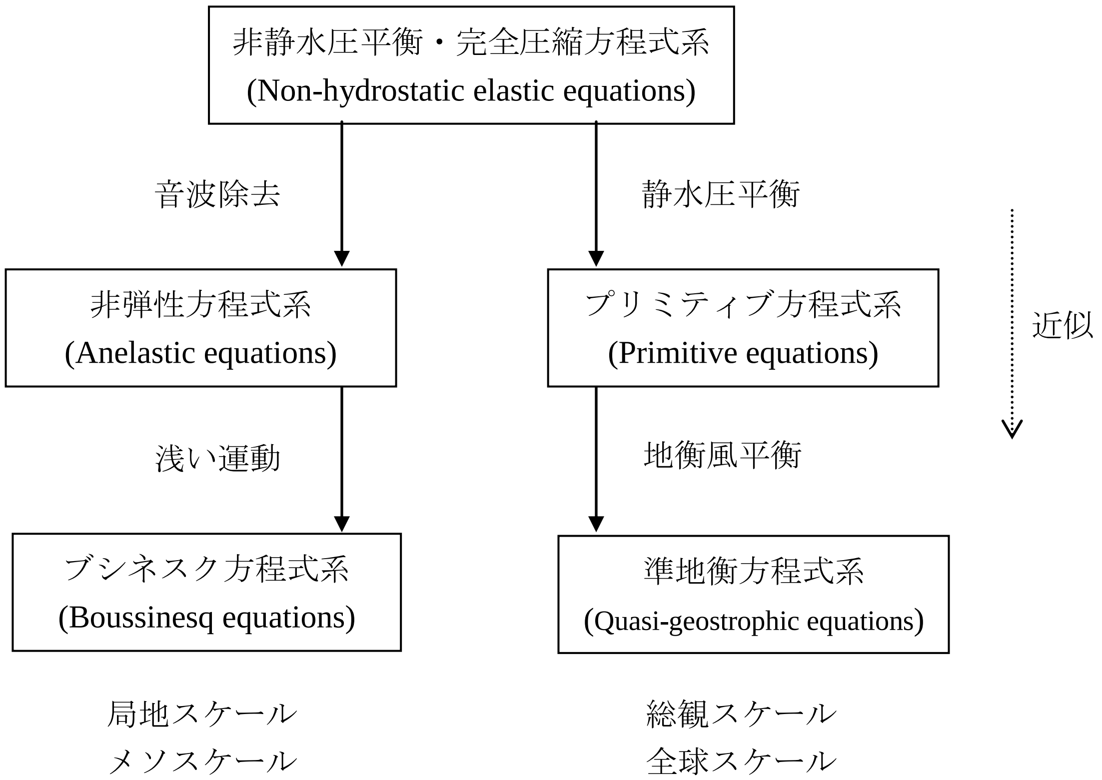
地球物理学（流体地球物理学分野）

0　気象学で用いる方程式系

　気象学においては、大気の運動を記述するために、流体力学に基づいた、いくつかの方程式系が用いられる。



　この授業では、比較的大きなスケールの現象を取り扱うために用いられる、プリミティブ方程式系を中心に学ぶ。

１　ナビエ・ストークスの方程式

１．１　オイラー微分とラグランジュ微分

はじめに、あるスカラーの物理量$a(x,y,z,t)$の時間微分を考えてみる。流体力学においては、**オイラー微分**（**局所微分**）と**ラグランジュ微分**（**物質微分**）という２種類の時間微分があり、両者を区別する必要がある。オイラー微分とは、空間のある一点にとどまって観測した時間変化である。スカラーの物理量$a(x,y,z,t)$のオイラー微分は、偏微分を用いて、$\dfrac{\partial}{\partial t}a$と表わされる。

一方、ラグランジュ微分とは、流体の流れに乗って移動しながら観測した時間変化である。流れに乗って移動する観測者が、ある時刻に(x,y,z)にいるとする。流速を$\vec{u}=(u,v,w)$とすると、微小な時間δt経過後には、観測者は$(x+u\delta t, y+v\delta t, z+w\delta t)$にいる。ゆえに、この観測者が観測する物理量$a(x,y,z,t)$は微小な時間$\delta t$経過後には、$a(x+u\delta t, y+v\delta t, z+w\delta t, t+\delta t)$に変化している。したがって、物理量$a(x,y,z,t)$のラグランジュ微分は、

$$\frac{\partial}{\partial t}a+u\frac{\partial}{\partial x}a+v\frac{\partial}{\partial y}a+w\frac{\partial}{\partial z}a=\frac{\partial}{\partial t}a+\vec{u}\bullet\nabla a$$

である。流体力学ではラグランジュ微分を

$$\frac{D}{Dt}\equiv\frac{\partial}{\partial t}+\vec{u}\bullet\nabla \tag{1}$$

と定義する。たとえば、物理量$a(x,y,z,t)$のラグランジュ微分は$\dfrac{D}{Dt}a$と表される。

オイラー微分とラグランジュ微分の違いは、$\vec{u}\bullet\nabla$という項の有無である。$\vec{u}\bullet\nabla$は移流項とよばれ、移流の効果を表している。

１．２　流体にはたらく力

ここでは、単位体積の流体にはたらく力を考える。まず、重力は重力加速度に質量をかけたものであるから$\rho\vec{g}$と書ける。

次に気圧傾度力を考える。気圧傾度力は、気圧勾配によって生じる力である。圧力とは流体の境界面に対して垂直にはたらく単位面積あたりの力である。たとえば、$-x$方向の境界面に対しては$+x$方向に、$+x$方向の境界面に対しては$-x$方向にはたらく。ここで圧力pがx方向に一様であれば、正味で流体にはた

らく力はゼロである。しかし、p が x 方向に変化していれば、流体に正味の力が生じる。この正味の力は単位体積あたり $-\frac{\partial}{\partial x}p$ である。y 方向、z 方向も考慮すれば、$-\nabla p$ と書ける。

さらに粘性の効果を考える。粘性とは運動量の拡散である。熱伝導方程式において熱拡散の効果が $k\nabla^2 T$ と書かれたのと同様に、粘性の効果は $\mu\nabla^2\vec{u}$ と書くことができる。μ を粘性率と呼ぶことがある。

１．３　運動方程式

ニュートン力学の第 2 法則より、流体の運動量の時間変化は流体にはたらく力の和に等しいから、

$$\rho\frac{D}{Dt}\vec{u}=\rho\vec{g}-\nabla p+\mu\nabla^2\vec{u} \tag{2}$$

となる。両辺を ρ で割って、粘性係数 $\nu=\frac{\mu}{\rho}$ とすると、

$$\frac{D}{Dt}\vec{u}=\vec{g}-\frac{1}{\rho}\nabla p+\nu\nabla^2\vec{u} \tag{3}$$

この方程式は**ナビエ・ストークスの方程式**と呼ばれ、流体力学における運動方程式である。

問 1.1　水が $+x$ の方向に 5 m/s で流れている。上流（$-x$ の方向）のほうが高温であり、温度勾配 $\frac{\partial}{\partial x}T$ は－0.2 K/m である。水じたいが加熱、冷却されることはなく、断熱的であるとする。また、y 方向、z 方向には温度は一様である。このとき、$\frac{\partial}{\partial t}T$ 、$\vec{u}\bullet\nabla T$、$\frac{D}{Dt}T$ の値をそれぞれ求めよ。

課題 1.1　式(3)において、$\vec{u}=\vec{0}$ で時間変化しないと仮定して、$\frac{\partial p}{\partial z}$ を求めよ。ただし、$\vec{g}=(0,0,-g)$ とする。$\vec{u}=\vec{0}$ を仮定したことにより、$\vec{u}$ の物質微分と粘性項を消去できることに注意せよ。

- この関係を**静水圧平衡**といい、鉛直方向の気圧傾度力と重力がつりあった状態を表している。

問 1.2　課題 1.1 の結果を用いて、地上付近で 10 m 上方へ移動したとき気圧が何 hPa 低下するか計算せよ。ただし空気の密度は 1.2 $\mathrm{kg/m^3}$ とする。また、重力加速度 g は $g = 9.8\ \mathrm{m/s^2}$ とする。