補遺１　静水圧平衡と地衡風平衡

１．１　静水圧平衡

はじめに、鉛直方向の気圧傾度力と重力がつりあった状態を考える。第 1 章の(3)より、ナビエ・ストークスの方程式は、

$$\frac{D}{Dt}\vec{u} = \vec{g} - \frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\nabla^2\vec{u} \tag{1}$$

と書ける。ここで、$\vec{u} = \vec{0}$ で、かつ時間変化しないと仮定すると、$\frac{D}{Dt}\vec{u} = \vec{0}$、$\nu\nabla^2\vec{u} = \vec{0}$ より、

$$\vec{0} = \vec{g} - \frac{1}{\rho}\nabla p \tag{2}$$

となる。$\vec{g} = (0, 0, -g)$ であることに注意して、(2)の z 成分を書きだすと、

$$0 = -g - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} \tag{3}$$

が得られる。ゆえに、

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \tag{4}$$

この関係を**静水圧平衡**という。現実の大気では、静水圧平衡はよい近似として成り立っている。

気圧座標においては、$\Phi = gz$ より、

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial p}\right)_{x,y} = g\left(\frac{\partial z}{\partial p}\right)_{x,y} \tag{5}$$

が成り立つ。静水圧平衡より、

$$\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)_{x,y} = -\rho g$$

だから、

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial p}\right)_{x,y} = g\left(\frac{\partial z}{\partial p}\right)_{x,y} = g\frac{1}{\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)_{x,y}} = g\frac{1}{-\rho g} = -\frac{1}{\rho} = -\alpha$$

ゆえに、静水圧平衡は

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial p}\right)_{x,y} = -\alpha \tag{6}$$

と表せる。

１．２　地衡風平衡

次に、水平方向の気圧傾度力とコリオリ力がつりあった状態を考える。第 2 章の(17)、(18)より、回転系における運動方程式の x 成分と y 成分は、それぞれ

$$\frac{D}{Dt}u = fv - \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}p + F_x \tag{7}$$

$$\frac{D}{Dt}v = -fu - \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial y}p + F_y \tag{8}$$

と書けた。ここで、粘性項を無視し、さらに、水平風 $\overrightarrow{u_h} = (u, v)$ が空間的に一様で、かつ時間変化しないと仮定する。このとき、$\frac{D}{Dt}u = \frac{D}{Dt}v = 0$ 、$F_x = F_y = 0$ だから、(8)は

$$0 = -fu - \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial y}p$$

となって、

$$u = -\frac{1}{f\rho}\frac{\partial}{\partial y}p \tag{9}$$

が得られる。同様に、(7)より、

$$v = \frac{1}{f\rho}\frac{\partial}{\partial x}p \tag{10}$$

が得られる。この関係を**地衡風平衡**という。(9)、(10)はベクトルを用いて、

$$\overrightarrow{u_h} = \frac{1}{f\rho}\vec{k} \times \nabla p \tag{11}$$

と書くこともできる。摩擦が効かない上空では、地衡風平衡はよい近似として成り立っている。

気圧座標における運動方程式の x 成分と y 成分は、第 3 章の(11)、(12)より、それぞれ

$$\frac{D}{Dt}u = fv - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_{y,p} + F_x \tag{12}$$

$$\frac{D}{Dt}v = -fu - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)_{x,p} + F_y \tag{13}$$

と書ける。この場合、地衡風平衡は

$$u = -\frac{1}{f}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)_{x,p} \tag{14}$$

$$v = \frac{1}{f}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_{y,p} \tag{15}$$

と表せる。

１．３　温度風の関係

ここで、気圧座標において、静水圧平衡と地衡風平衡から、温度の水平勾配と水平風の鉛直シア（圧力微分）との間の関係を導く。静水圧平衡の関係は、(6)より、

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p} = -\alpha \tag{16}$$

と書けた。また、理想気体の状態方程式は、

$$p\alpha = RT \tag{17}$$

である。(17)を用いると、(6)は、

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p} = -\frac{RT}{p} \tag{18}$$

と書ける。(18)を気圧座標において、x で偏微分すると、

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial p}\right) = -\frac{R}{p}\frac{\partial T}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) = -\frac{R}{p}\frac{\partial T}{\partial x} \tag{19}$$

同様に、y で偏微分すると、

$$\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) = -\frac{R}{p}\frac{\partial T}{\partial y} \tag{20}$$

が得られる。一方、地衡風平衡は、(14)、(15)より、

$$u = -\frac{1}{f}\frac{\partial \Phi}{\partial y} \tag{21}$$

$$v = \frac{1}{f}\frac{\partial \Phi}{\partial x} \tag{22}$$

と表せた。(21)、(22)を p で偏微分すると、

$$\frac{\partial u}{\partial p} = -\frac{1}{f}\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) \tag{23}$$

$$\frac{\partial v}{\partial p} = \frac{1}{f}\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) \tag{24}$$

が得られる。(20)、(23)より、

$$\frac{\partial u}{\partial p} = \frac{R}{fp}\frac{\partial T}{\partial y} \tag{25}$$

(19)、(24)より、

$$\frac{\partial v}{\partial p} = -\frac{R}{fp}\frac{\partial T}{\partial x} \tag{26}$$

が導かれる。(25)、(26)で表される関係を**温度風の関係**という。(25)、(26)はベクトルを用いて、

$$\frac{\partial}{\partial p}\vec{u} = -\frac{R}{fp}\vec{k} \times \nabla T \tag{27}$$

と書くこともできる。

１．４　スケールハイト

理想気体の状態方程式と静水圧平衡の関係から、等温大気における気圧の鉛直分布を導く。水平方向には一様な場を仮定すると、静水圧平衡の関係は、(4)より、

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g \tag{28}$$

と書ける。また、理想気体の状態方程式は、

$$p = \rho RT \tag{29}$$

(29)より、

$$\rho = \frac{p}{RT} \tag{30}$$

(30)を(28)に代入して、

$$\frac{dp}{dz} = -\frac{g}{RT}p \tag{31}$$

常微分方程式(31)を解くと、

$$\frac{1}{p}\frac{dp}{dz} = -\frac{g}{RT}$$

両辺を z について積分して、

$$\ln p = -\frac{g}{RT} z + C$$

両辺の指数をとると、

$$p = p_0 \exp\left(-\frac{g}{RT} z\right) \tag{32}$$

が得られる。気圧が e^{-1} 倍に減少する高さ H_0 は、

$$H_0 = \frac{RT}{g} \tag{33}$$

である。この H_0 を**スケールハイト**という。現実の大気では、スケールハイトは 8km 程度である。