

補遺 3 連続の式

3. 1 連続の式

第 4 章の(2)より、連続の式は、

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \quad (1)$$

と書ける。左辺第 2 項を成分に分けて書くと、

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w) = 0 \quad (2)$$

となる。積の微分を展開して書けば、

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + u \frac{\partial}{\partial x} \rho + \rho \frac{\partial}{\partial x} u + v \frac{\partial}{\partial y} \rho + \rho \frac{\partial}{\partial y} v + w \frac{\partial}{\partial z} \rho + \rho \frac{\partial}{\partial z} w = 0 \quad (3)$$

となるので、項の順序を入れ替えて、

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + u \frac{\partial}{\partial x} \rho + v \frac{\partial}{\partial y} \rho + w \frac{\partial}{\partial z} \rho + \rho \frac{\partial}{\partial x} u + \rho \frac{\partial}{\partial y} v + \rho \frac{\partial}{\partial z} w = 0 \quad (4)$$

と表せる。ゆえに、

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \right) \rho + \rho \left(\frac{\partial}{\partial x} u + \frac{\partial}{\partial y} v + \frac{\partial}{\partial z} w \right) = 0 \quad (5)$$

となって、

$$\frac{D}{Dt} \rho + \rho \nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (6)$$

が得られる。