## ２　回転系における運動方程式

> 地球は自転しているので、地球上にいる観測者は、回転する台のうえに乗って気象観測をしているようなものである。そのような場所で観測する場合は、観測者自身の運動に伴って見かけの力が生じるので、運動方程式を修正しなければならない。

### ２．１　慣性系におけるナビエ・ストークスの方程式

慣性系におけるナビエ・ストークスの方程式において、速度ベクトル$\vec{u}$のラグランジュ微分$\dfrac{D}{Dt}\vec{u}$は

$$\frac{D}{Dt}\vec{u} = \vec{g} - \frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\nabla^2\vec{u} \tag{1}$$

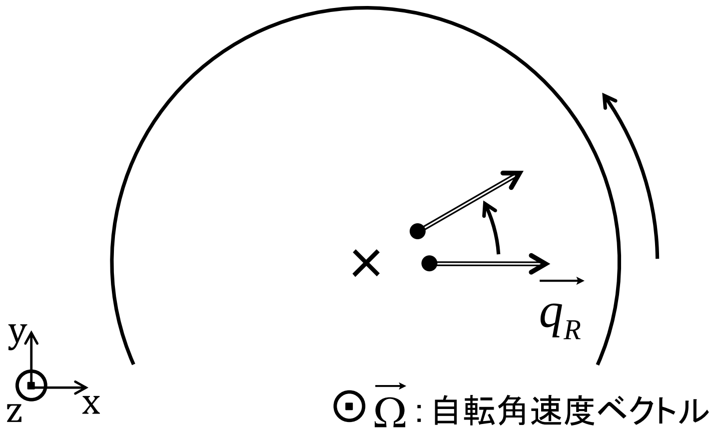
と書けた。以下では、回転系において、速度ベクトル$\vec{u}$のラグランジュ微分がどのように表せるか考える。

### ２．２　回転系におけるラグランジュ微分

回転系 R における演算子や物理量を添え字 $_R$ で表すことにして、回転系におけるラグランジュ微分$\dfrac{D_R}{Dt}$を考える。座標のとりかたに依存しないスカラー量であれば、$\dfrac{D_R}{Dt}$と$\dfrac{D}{Dt}$は等しい。しかし、ベクトル量$\vec{q}$のラグランジュ微分は、座標系の回転を考慮して、

$$\frac{D}{Dt}\vec{q} = \left(\frac{D_R}{Dt} + \vec{\Omega}\times\right)\overrightarrow{q_R} \tag{2}$$

となる。ただし、$\vec{\Omega}$は回転系の自転の角速度ベクトルである。




## ２．３　速度ベクトルのラグランジュ微分

速度ベクトル$\vec{u}$のラグランジュ微分は、(2)を用いて、

$$
\begin{aligned}
\frac{D}{Dt}\vec{u} &= \frac{D}{Dt}\left(\frac{D}{Dt}\vec{r}\right) = \left(\frac{D_R}{Dt} + \vec{\Omega}\times\right)\left(\frac{D_R}{Dt} + \vec{\Omega}\times\right)\overrightarrow{r_R} \\
&= \frac{D_R}{Dt}\overrightarrow{u_R} + 2\vec{\Omega}\times\overrightarrow{u_R} + \vec{\Omega}\times\left(\vec{\Omega}\times\overrightarrow{r_R}\right) \\
&= \frac{D_R}{Dt}\overrightarrow{u_R} + 2\vec{\Omega}\times\overrightarrow{u_R} - \Omega^2\overrightarrow{r_R} + \left(\vec{\Omega}\bullet\overrightarrow{r_R}\right)\vec{\Omega} \\
&= \frac{D_R}{Dt}\overrightarrow{u_R} + 2\vec{\Omega}\times\overrightarrow{u_R} - \Omega^2\overrightarrow{\hat{r}_R}
\end{aligned}
\tag{3}
$$

と書ける。ただし、ベクトル$\overrightarrow{\hat{r}_R}$を

$$
\overrightarrow{\hat{r}_R} = \overrightarrow{r_R} - \frac{\left(\vec{\Omega}\bullet\overrightarrow{r_R}\right)}{\Omega^2}\vec{\Omega} \tag{4}
$$

と定義した。ベクトル$\overrightarrow{\hat{r}_R}$は$\overrightarrow{r_R}$から$\vec{\Omega}$に平行な成分を差し引いたベクトルである。

## ２．４　回転系におけるナビエ・ストークスの方程式

式(3)を(1)に代入すると、

$$
\frac{D_R}{Dt}\overrightarrow{u_R} = -2\vec{\Omega}\times\overrightarrow{u_R} + \Omega^2\overrightarrow{\hat{r}_R} + \vec{g} - \frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\nabla^2\overrightarrow{u_R} \tag{5}
$$

$\overrightarrow{g_R} = \vec{g} + \Omega^2\overrightarrow{\hat{r}_R}$ とすると、

$$
\frac{D_R}{Dt}\overrightarrow{u_R} = -2\vec{\Omega}\times\overrightarrow{u_R} + \overrightarrow{g_R} - \frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\nabla^2\overrightarrow{u_R} \tag{6}
$$

添え字$_R$を消去して、

$$
\frac{D}{Dt}\vec{u} = -2\vec{\Omega}\times\vec{u} + \vec{g} - \frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\nabla^2\vec{u} \tag{7}
$$

これが回転系におけるナビエ・ストークスの方程式である。

## ２．５　局所直交座標系における運動方程式

ここで、観測点における局所直交座標系を導入する。東西方向、南北方向、鉛直方向の基本ベクトルをそれぞれ、$\vec{i}$、$\vec{j}$、$\vec{k}$ とすると、

$$\vec{u} = \vec{i}u + \vec{j}v + \vec{k}w \tag{8}$$

なので、

$$\frac{D}{Dt}\vec{u} = \vec{i}\frac{D}{Dt}u + \vec{j}\frac{D}{Dt}v + \vec{k}\frac{D}{Dt}w \tag{9}$$

また、

$$\vec{\Omega} = \vec{j}\Omega\cos\phi + \vec{k}\Omega\sin\phi \tag{10}$$

ただし、$\phi$ は緯度である。地球の大気の運動を考えるうえでは、自転のうち水平面内での回転、つまり自転角速度ベクトル $\vec{\Omega}$ の鉛直成分が重要であるから、(7)の $\vec{\Omega}$ を

$$\vec{\Omega}^{*} = \vec{k}\Omega\sin\phi \tag{11}$$

に置き換えると、

$$\frac{D}{Dt}\vec{u} = -(2\Omega\sin\phi)\vec{k}\times\vec{u} + \vec{g} - \frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\nabla^2\vec{u} \tag{12}$$

が得られる。一般に、$xy$ 平面上のベクトル $\vec{a}$ に対して、$\vec{k}\times\vec{a}$ はもとのベクトルを反時計回りに 90° 回転したベクトルを表す。(12)の各成分を分けて書けば、

$$\frac{D}{Dt}u = 2\Omega v\sin\phi - \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}p + \nu\nabla^2 u \tag{13}$$

$$\frac{D}{Dt}v = -2\Omega u\sin\phi - \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial y}p + \nu\nabla^2 v \tag{14}$$

$$\frac{D}{Dt}w = -g - \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial z}p + \nu\nabla^2 w \tag{15}$$

となる。(13)と(14)において、

$$f = 2\Omega\sin\phi \tag{16}$$

とおき、さらに、(13)、(14)、(15)の粘性項をそれぞれ $F_x$、$F_y$、$F_z$ と書くと、

$$\frac{D}{Dt}u = fv - \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}p + F_x \tag{17}$$

$$\frac{D}{Dt}v = -fu - \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial y}p + F_y \tag{18}$$

$$\frac{D}{Dt}w = -g - \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial z}p + F_z \tag{19}$$

と書くことができる[1]。ここで $f$ は**コリオリ係数**(Coriolis coefficient)である。

**問 2.1**　式(3)では、ベクトル演算の公式 $\vec{a}\times(\vec{a}\times\vec{b}) = -|\vec{a}|^2\vec{b} + (\vec{a}\bullet\vec{b})\vec{a}$ を用いた。この公式を証明せよ。

**課題 2.1**　式(17)と(18)において、水平風 $\overrightarrow{u_h}$ が $\overrightarrow{u_h} = (u, v, 0)$ であり、空間的に一様で時間変化しないと仮定したとき、$\overrightarrow{u_h}$ と圧力 $p$ の間にはどのような関係式が成り立つか。$\overrightarrow{u_h}$ が空間的に一様で時間変化しないと仮定したことにより、$\overrightarrow{u_h}$ のラグランジュ微分と粘性項を消去できることに注意せよ。

- この関係を**地衡風平衡**(geostrophic balance)といい、水平方向の気圧傾度力とコリオリ力がつりあった状態を表している。

**問 2.2**　北緯 30°において、ある高度での南北方向の気圧勾配が 1.0 hPa/100 km（北のほうが低い）、空気の密度が 1.0 kg/m³ であるとする。北緯 30°におけるコリオリ係数を $f = 7.2\times10^{-5}$ /s として、この高度での東西風 $u$ の値を求めよ。ただし、地衡風平衡を仮定し、課題 2.1 の結果を用いてよい。

**課題 2.2**　式(17)と(18)において、空間的に一様な場を仮定すると、水平風の場 $\overrightarrow{u_h} = (u, v, 0)$ はどのように時間変化するか。数式で示し、さらに図示せよ。空間的に一様な場を仮定することにより、移流項と気圧傾度力、粘性項を消去できることに注意せよ。

- このような運動を**慣性振動**(inertial oscillation)という。

[1] 厳密には、角運動量とエネルギーの保存を考慮すると、(17)、(18)に代えて、以下のような式が得られる。

$$\frac{D}{Dt}u = 2\Omega v\sin\phi + \frac{uv}{a}\tan\phi - \frac{1}{\rho}\frac{1}{a\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\lambda}p + F_x$$

$$\frac{D}{Dt}v = -2\Omega u\sin\phi - \frac{u^2}{a}\tan\phi - \frac{1}{\rho}\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial\phi}p + F_y$$

ただし、$\lambda$ は経度、$a$ は地球半径である。導出はかなり複雑であるため、ここでは省略する。数値シミュレーションでは、この部分を厳密に取り扱わないと、角運動量やエネルギーが保存しないために計算が実際に破綻することがある。