地球物理学（2022 年度春学期）（流体地球物理学分野）
最終テスト

注意：計算問題においては計算過程も示すこと。

１．海上を 10 m/s の水平風が一様に吹いている。鉛直風はないものとする。この海域には A、B の２つの観測点があり、海上気温を測定している。ある時刻に、観測点 A で測定された気温は 10.0 ℃であった。同じ時刻に 10 km 風上に位置する観測点 B で測定された気温は 9.6 ℃であった。また、観測点 A、B とも気温は 10 分間に 0.3 K の割合で上昇している。この海域での海上気温 T の水平勾配 ∇T は一様であるとして、以下の問いに答えよ。国際単位系（たとえば、温度の単位は K、時間の単位は s である）に従い、適切な単位を付して解答すること。

（１）観測点 A における気温 T のオイラー微分 $\frac{\partial}{\partial t}T$ の値を求め、<u>有効数字１けた</u>で答えよ。

（２）水平風ベクトルを $\vec{u}$ としたとき、$\vec{u} \bullet \nabla T$ の値を計算し、<u>有効数字１けた</u>で答えよ。

（３）以上の小問の結果を用いて、気温のラグランジュ微分 $\frac{D}{Dt}T$ の値を求め、<u>有効数字１けた</u>で答えよ。

２．地衡風および摩擦がある場合の風について、以下の問いに答えよ。

地面との摩擦が効かない自由大気では、気圧座標（p 座標）における運動方程式の x 成分（東西成分）と y 成分（南北成分）はそれぞれ、次のように書ける。

$$\frac{D}{Dt}u = fv - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad ①$$

$$\frac{D}{Dt}v = -fu - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad ②$$

ただし、u は東西風、v は南北風、Φ はジオポテンシャルである。また、f はコリオリ係数（$f > 0$）で一定の値をとる。ここで、摩擦の効果を考慮して、①、②を次のように書きかえる。

$$\frac{D}{Dt}u = fv - \frac{\partial \Phi}{\partial x} - ru \quad ③$$

$$\frac{D}{Dt}v = -fu - \frac{\partial \Phi}{\partial y} - rv \quad ④$$

ただし、r はゼロまたは正の定数である。以下、鉛直風はゼロとし、特定の等圧面内で大気の運動を考える。

（１）③、④において、東西風 u と南北風 v は空間的に一様で、かつ、ジオポテンシャル Φ の東西方向の勾配はなく、南北方向の勾配は一定と仮定する。このとき、③、④は

$$\frac{d}{dt}u = fv - ru \quad ⑤$$

$$\frac{d}{dt}v = -fu + G - rv \quad ⑥$$

と書ける。G は定数であり、本問では、$G > 0$ とする。⑤、⑥より、$r = 0$ という条件のもとで、定常に達したときの u と v を求め、f と G で表せ。

（２）同様に、$r>0$という条件のもとで、定常に達したときのuとvを求め、f、r、Gで表せ。

（３ fとGを一定に保ちながら、rだけを変化させたとき、vの最大値を求め、fとGで表せ。また、そのときの水平風ベクトル$\vec{u}=(u,v)$と等高度線がなす角の大きさを求めよ。

３．連続の式について、以下の問いに答えよ。

気圧座標（p 座標）において、連続の式は、

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial \omega}{\partial p}=0 \qquad ①$$

と書ける。ただし、u、v、ω は風速の x 成分（東西成分）、y 成分（南北成分）、p 成分である。

（１）①において、水平発散の鉛直分布を

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=D\cos\left(\pi\frac{p-p_1}{p_2-p_1}\right) \quad \left(p_1 \le p \le p_2\right) \qquad ②$$

と仮定する。ただし、D、p_1、p_2 は定数であり、$D>0$、$0<p_1<p_2$ をみたす。このとき、ω を p の関数として求めよ。ただし、境界条件として、$p=p_1, p_2$ で $\omega=0$ とする。符号に注意して解答せよ。

ヒント：一般に、$\int \cos a\theta d\theta=\frac{1}{a}\sin a\theta+C$（$C$ は積分定数）である。

（２）$D=1.57\times10^{-4}$ /s、$p_1=300$ hPa、$p_2=900$ hPa のとき、$p=600$ hPa における ω の値を求めよ。ω の単位は hPa/h とし（1h=3600s）、<u>有効数字２けた</u>で答えよ。$\pi=3.14$ とする。符号に注意して解答せよ。

４．熱力学方程式と、乾燥断熱減率、温位について、以下の問いに答えよ。

乾燥空気に関して、熱力学の第１法則は、次のように書ける。

$$d'Q = C_v dT + p d\alpha$$

ただし、T、p、α は、それぞれ温度、圧力、比容（密度 ρ の逆数）であり、すべて正の値をとる。また、C_v は定積比熱（$C_v > 0$）であり、一定値をとる。ここで、断熱（$d'Q = 0$）という条件のもとでは、

$$C_v dT + p d\alpha = 0 \qquad ①$$

が成り立つ。一方、乾燥空気を理想気体とみなせば、状態方程式は、

$$p\alpha = RT \qquad ②$$

と書ける。ただし、R は気体定数（$R > 0$）であり、一定値をとる。②の両辺を微分すると、

$$p d\alpha + \alpha dp = R dT$$

が得られる。これを①に代入すると、

$$C_v dT + R dT - \alpha dp = 0$$

$$C_p dT - \alpha dp = 0 \qquad ③$$

となる。ただし、C_p は定圧比熱であり、$C_p = C_v + R$ である。

（１）静水圧平衡より、

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g \qquad ④$$

が成り立つ。ただし、g は重力加速度である。③と④を用いて、$\dfrac{dT}{dz}$ を C_p と g で表せ。符号に注意して解答せよ。

（２）物理量θをTとpの関数として

$$\theta = T\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\kappa} \qquad ⑤$$

と定義する。ただし、κは定数である。また、p_0は基準となる圧力であり、これも定数である。このとき、θの微分$d\theta$は

$$d\theta = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\kappa} dT + \frac{T\kappa}{p}\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\kappa} dp = \theta\left(\frac{1}{T}dT + \frac{\kappa}{p}dp\right) \qquad ⑥$$

と書ける。一方、②と③より、断熱という条件のもとでは、

$$C_p dT - \frac{RT}{p}dp = 0 \qquad ⑦$$

が成り立つ。⑥と⑦を比べることによって、断熱という条件のもとで物理量θが保存量になるようにκの値を定め、C_pとRで表せ。符号に注意して解答せよ。