

補遺 1 静水圧平衡と地衡風平衡

1. 1 静水圧平衡

はじめに、鉛直方向の気圧傾度力と重力がつりあった状態を考える。第 1 章の(3)より、ナビエ・ストークスの方程式は、

$$\frac{D}{Dt}\vec{u} = \vec{g} - \frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\nabla^2\vec{u} \quad (1)$$

と書ける。ここで、 $\vec{u} = \vec{0}$ で、かつ時間変化しないと仮定すると、 $\frac{D}{Dt}\vec{u} = \vec{0}$ 、 $\nu\nabla^2\vec{u} = \vec{0}$ より、

$$\vec{0} = \vec{g} - \frac{1}{\rho}\nabla p \quad (2)$$

となる。 $\vec{g} = (0, 0, -g)$ であることに注意して、(2)の z 成分を書きだすと、

$$0 = -g - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} \quad (3)$$

が得られる。ゆえに、

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \quad (4)$$

この関係を**静水圧平衡**(hydrostatic balance)という。現実の大気では、静水圧平衡はよい近似として成り立っている。

気圧座標においては、 $\Phi = gz$ より、

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial p}\right)_{x,y} = g\left(\frac{\partial z}{\partial p}\right)_{x,y} \quad (5)$$

が成り立つ。静水圧平衡より、

$$\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)_{x,y} = -\rho g$$

だから、

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial p}\right)_{x,y} = g\left(\frac{\partial z}{\partial p}\right)_{x,y} = g\frac{1}{\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)_{x,y}} = g\frac{1}{-\rho g} = -\frac{1}{\rho} = -\alpha$$

ゆえに、静水圧平衡は

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial p}\right)_{x,y} = -\alpha \quad (6)$$

と表せる。

1. 2 地衡風平衡

次に、水平方向の気圧傾度力とコリオリ力がつりあった状態を考える。第 2 章の(17)、(18)より、回転系における運動方程式の x 成分と y 成分は、それぞれ

$$\frac{D}{Dt}u = fv - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} p + F_x \quad (7)$$

$$\frac{D}{Dt}v = -fu - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} p + F_y \quad (8)$$

と書けた。ここで、粘性項を無視し、さらに、水平風 $\vec{u}_h = (u, v)$ が空間的に一様で、かつ時間変化しないと仮定する。このとき、 $\frac{D}{Dt}u = \frac{D}{Dt}v = 0$ 、 $F_x = F_y = 0$ だから、(8)は

$$0 = -fu - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} p$$

となって、

$$u = -\frac{1}{f\rho} \frac{\partial}{\partial y} p \quad (9)$$

が得られる。同様に、(7)より、

$$v = \frac{1}{f\rho} \frac{\partial}{\partial x} p \quad (10)$$

が得られる。この関係を**地衡風平衡**(geostrophic balance)という。(9)、(10)はベクトルを用いて、

$$\vec{u}_h = \frac{1}{f\rho} \vec{k} \times \nabla p \quad (11)$$

と書くこともできる。摩擦が効かない上空では、地衡風平衡はよい近似として成り立っている。

気圧座標における運動方程式の x 成分と y 成分は、第 3 章の(11)、(12)より、それぞれ

$$\frac{D}{Dt}u = fv - \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)_{y,p} + F_x \quad (12)$$

$$\frac{D}{Dt}v = -fu - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_{x,p} + F_y \quad (13)$$

と書ける。この場合、地衡風平衡は

$$u = -\frac{1}{f} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_{x,p} \quad (14)$$

$$v = \frac{1}{f} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_{y,p} \quad (15)$$

と表せる。

1. 3 温度風の関係

ここで、気圧座標において、静水圧平衡と地衡風平衡から、温度の水平勾配と水平風の鉛直シア（圧力微分）との間の関係を導く。静水圧平衡の関係は、(6)より、

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p} = -\alpha \quad (16)$$

と書けた。また、理想気体の状態方程式は、

$$p\alpha = RT \quad (17)$$

である。(17)を用いると、(6)は、

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p} = -\frac{RT}{p} \quad (18)$$

と書ける。(18)を気圧座標において、 x で偏微分すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial p} \right) &= -\frac{R}{p} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) &= -\frac{R}{p} \frac{\partial T}{\partial x} \end{aligned} \quad (19)$$

同様に、 y で偏微分すると、

$$\frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) = -\frac{R}{p} \frac{\partial T}{\partial y} \quad (20)$$

が得られる。一方、地衡風平衡は、(14)、(15)より、

$$u = -\frac{1}{f} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad (21)$$

$$v = \frac{1}{f} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad (22)$$

と表せた。(21)、(22)を p で偏微分すると、

$$\frac{\partial u}{\partial p} = -\frac{1}{f} \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) \quad (23)$$

$$\frac{\partial v}{\partial p} = \frac{1}{f} \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \quad (24)$$

が得られる。(20)、(23)より、

$$\frac{\partial u}{\partial p} = \frac{R}{fp} \frac{\partial T}{\partial y} \quad (25)$$

(19)、(24)より、

$$\frac{\partial v}{\partial p} = -\frac{R}{fp} \frac{\partial T}{\partial x} \quad (26)$$

が導かれる。(25)、(26)で表される関係を**温度風の関係**(thermal wind relationship)という。(25)、(26)はベクトルを用いて、

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial p} = -\frac{R}{fp} \vec{k} \times \nabla T \quad (27)$$

と書くこともできる。

1. 4 スケールハイト

理想気体の状態方程式と静水圧平衡の関係から、等温大気における気圧の鉛直分布を導く。水平方向には一様な場を仮定すると、静水圧平衡の関係は、(4)より、

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g \quad (28)$$

と書ける。また、理想気体の状態方程式は、

$$p = \rho RT \quad (29)$$

(29)より、

$$\rho = \frac{p}{RT} \quad (30)$$

(30)を(28)に代入して、

$$\frac{dp}{dz} = -\frac{g}{RT} p \quad (31)$$

常微分方程式(31)を解くと、

$$\frac{1}{p} \frac{dp}{dz} = -\frac{g}{RT}$$

両辺を z について積分して、

$$\ln p = -\frac{g}{RT} z + C$$

両辺の指数をとると、

$$p = p_0 \exp\left(-\frac{g}{RT} z\right) \quad (32)$$

が得られる。気圧が e^{-1} 倍に減少する高さ H_0 は、

$$H_0 = \frac{RT}{g} \quad (33)$$

である。この H_0 をスケールハイト(scale height)という。現実の大気では、スケールハイトは 8km 程度である。