地球物理学（2023 年度春学期）（流体地球物理学分野）
最終テスト

注意：計算問題においては計算過程も示すこと。

１．海上を 10 m/s の北西風が一様に吹いている。鉛直風はないものとする。この海域には A、B の２つの観測点があり、海上気温を測定している。ある時刻に、観測点 A で測定された気温は 10.0 ℃であった。同じ時刻に 10 km 北に位置する観測点 B で測定された気温は 5.0 ℃であった。また、観測点 A、B とも気温は 10 分間に 1.5 K の割合で低下している。この海域での海上気温 T の東西勾配 $\frac{\partial}{\partial x}T$ はゼロ、南北勾配 $\frac{\partial}{\partial y}T$ は一様であるとして、以下の問いに答えよ。国際単位系（たとえば、温度の単位は K、時間の単位は s である）に従い、適切な単位を付して解答すること。$\cos 45° = \sin 45° = 0.7$ とする。

（１）観測点 A における気温 T のオイラー微分 $\frac{\partial}{\partial t}T$ の値を求め、有効数字２けたで答えよ。符号に注意して解答せよ。

（２）水平風ベクトルを $\vec{u}$ としたとき、$\vec{u} \bullet \nabla T$ の値を計算し、有効数字２けたで答えよ。

（３）以上の小問の結果を用いて、気温のラグランジュ微分 $\frac{D}{Dt}T$ の値を求め、有効数字２けたで答えよ。

２．プリミティブ方程式系の運動方程式を応用して、渦度と発散に関する以下の問いに答えよ。

気圧座標（p 座標）における運動方程式の x 成分（東西成分）と y 成分（南北成分）を次のように書く。

$$\frac{D}{Dt}u = fv - \frac{\partial \Phi}{\partial x}$$

$$\frac{D}{Dt}v = -fu - \frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

ただし、u、v、Φ は、それぞれ東西風、南北風、ジオポテンシャルである。f はコリオリ係数であり、正の定数とする。ここで、運動量の移流の効果は無視できると仮定して、ラグランジュ微分をオイラー微分に置き換えると、

$$\frac{\partial}{\partial t}u = fv - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \qquad ①$$

$$\frac{\partial}{\partial t}v = -fu - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \qquad ②$$

が得られる。

（１）①の両辺を y で偏微分し、また、②の両辺を x で偏微分し、両者の差を計算することによって、渦度（グザイ）$\xi = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$ の時間微分 $\frac{\partial \xi}{\partial t}$ を求め、f、$\frac{\partial u}{\partial x}$、$\frac{\partial v}{\partial y}$ を用いて表せ。

（２）さらに、摩擦の効果を考慮して、①、②を

$$\frac{\partial}{\partial t}u = fv - \frac{\partial \Phi}{\partial x} - ru \qquad ③$$

$$\frac{\partial}{\partial t}v = -fu - \frac{\partial \Phi}{\partial y} - rv \qquad ④$$

と書きかえる。ここで、r は正の定数であり、右辺第３項が摩擦の効果を表している。このとき、渦度 ξ の時間微分 $\frac{\partial \xi}{\partial t}$ を求め、f、$\frac{\partial u}{\partial x}$、$\frac{\partial v}{\partial y}$、$r$、

ξを用いて表せ。

３．連続の式について、以下の問いに答えよ。

気圧座標（p 座標）において、連続の式は、

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial \omega}{\partial p}=0 \qquad ①$$

と書ける。ただし、u、v、ω は風速の x 成分（東西成分）、y 成分（南北成分）、p 成分である。

（１）①において、水平発散の鉛直分布を

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=-D\cos\left(\pi\frac{p_2-p}{p_2-p_1}\right) \quad \left(p_1\le p\le p_2\right) \qquad ②$$

と仮定する。ただし、D、p_1、p_2 は定数であり、$D>0$、$0<p_1<p_2$ をみたす。このとき、ω を p の関数として求めよ。ただし、境界条件として、$p=p_1, p_2$ で $\omega=0$ とする。

ヒント：一般に、$\int\cos a\theta d\theta=\frac{1}{a}\sin a\theta+C$（$C$ は積分定数）である。

（２）$D=1.57\times10^{-4}$ /s、$p_1=200$ hPa、$p_2=900$ hPa のとき、$p=550$ hPa における ω の値を求めよ。ω の単位は Pa/s とし、<u>有効数字２けた</u>で答えよ。$\pi=3.14$ とする。符号に注意して解答せよ。

４．温度風の関係について、以下の問いに答えよ。

地面との摩擦が効かない自由大気では、気圧座標（ p 座標）における運動方程式の y 成分（南北成分）は

$$\frac{D}{Dt}v = -fu - \frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

と書ける。ここで南北風 v は時間、場所によらずゼロであると仮定すると、

$$0 = -fu - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \qquad ①$$

が得られる。一方、静水圧平衡の関係は

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p} = -\alpha$$

であって、理想気体の状態方程式は

$$p\alpha = RT \qquad ②$$

であるから、

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p} = -\frac{RT}{p} \qquad ③$$

が成り立つ。ただし、u 、v は風速の x 成分（東西成分）、y 成分（南北成分）、Φ はジオポテンシャル、T は温度、α は比容（密度の逆数）である。また、R は気体定数、 f はコリオリ係数（ $f > 0$ ）であり、いずれも一定の値をとる。

（１）①、③を用いて、東西風の鉛直シア（圧力微分） $\dfrac{\partial u}{\partial p}$ を R 、f 、p 、$\dfrac{\partial T}{\partial y}$ で表せ。

ヒント：①の両辺を p で、③の両辺を y で偏微分せよ。

（２） $\Phi = gz$ であることを考慮すると、静水圧平衡の関係は

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{g}{\alpha} \qquad ④$$

と書ける。ただし、g は重力加速度、z は高度である。（１）の結果と④から $\frac{\partial u}{\partial z}$ を求め、さらに②を使って、$\frac{\partial u}{\partial z}$ を g 、 f 、T 、 $\frac{\partial T}{\partial y}$ で表せ。

（３）冬季の中緯度域では対流圏上層の偏西風は通常、数十 m/s に達する。（２）の結果を用いると、$\frac{\partial T}{\partial y}$ の値から、$\frac{\partial u}{\partial z}$ の値を計算することができる。北半球中緯度のある観測点では500 hPa 面において、$T = 2.4 \times 10^2$ K 、$\frac{\partial T}{\partial y} = -1.2 \times 10^{-5}$ K/m であった。このとき、$\frac{\partial u}{\partial z}$ を求めよ。ただし、$g = 1.0 \times 10$ m/s^2 、 $f = 1.0 \times 10^{-4}$ /s とする。解答は、国際単位系（たとえば、時間の単位は s である）にしたがい、有効数字２けたで示すこと。