

地球物理学（2024 年度春学期）（流体地球物理学分野）
期末試験

注意：計算問題においては計算過程も示すこと。

1. ある平野を 10 m/s の水平風が一様に吹いている。鉛直風はないものとする。この平野には A、B の 2 つの観測点があり、地上気温を測定している。ある時刻に、観測点 A で測定された気温は $30.0 \text{ }^{\circ}\text{C}$ であった。同じ時刻に 10 km 風上に位置する観測点 B で測定された気温は $30.8 \text{ }^{\circ}\text{C}$ であった。また、観測点 A、B とも気温は 10 分間に 0.3 K の割合で上昇している。この平野での地上気温 T の水平勾配 ∇T は一様であるとして、以下の問いに答えよ。国際単位系（たとえば、温度の単位は K 、時間の単位は s である）に従い、適切な単位を付して解答すること。

（1）観測点 A における気温 T のオイラー微分 $\frac{\partial}{\partial t} T$ の値を求め、有効数字 1 けたで答えよ。

（2）水平風ベクトルを $\vec{u}$ としたとき、 $\vec{u} \bullet \nabla T$ の値を計算し、有効数字 1 けたで答えよ。

（3）以上の小問の結果を用いて、気温のラグランジュ微分 $\frac{D}{Dt} T$ の値を求め、有効数字 1 けたで答えよ。

2. 大気の運動エネルギーについて、以下の問いに答えよ。

地面との摩擦が効かない自由大気では、気圧座標（ p 座標）における運動方程式の x 成分（東西成分）と y 成分（南北成分）はそれぞれ、次のように書ける。

$$\frac{D}{Dt}u = fv - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad (1)$$

$$\frac{D}{Dt}v = -fu - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad (2)$$

ただし、 u は東西風、 v は南北風、 Φ はジオポテンシャルである。また、 f はコリオリ係数（ $f > 0$ ）で一定の値をとる。以下、鉛直流はゼロとし、特定の等圧面内で大気の運動を考える。

(1) 一般にスカラーの物理量 $a = a(x, y, t)$ について、

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{a^2}{2}\right) = a \frac{D}{Dt}a \quad (3)$$

が成り立つ。①、②より、運動エネルギー $K = \frac{1}{2}(u^2 + v^2)$ のラグランジュ微分

$$\frac{D}{Dt}K = \frac{D}{Dt}\left(\frac{u^2 + v^2}{2}\right) = u \frac{D}{Dt}u + v \frac{D}{Dt}v \quad (4)$$

を計算し、時間微分を含まない形で表せ。ただし、 ∇ を用いて

$$u \frac{\partial \Phi}{\partial x} + v \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \vec{u} \bullet \nabla \Phi \quad (5)$$

と表してよい。

(2) 前問(1)の結果を用いて、各空気塊について運動エネルギー K とジオポテンシャル Φ の和が保存する、つまり、

$$\frac{D}{Dt}(K + \Phi) = 0 \quad (6)$$

であることを示せ。ただし、

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \quad (7)$$

とする。

3. 連続の式について、以下の問いに答えよ。

局地的に地表面の温度が高くなると、大気境界層とよばれる対流圏の下部の大気が加熱され、大気境界層内での水平風の収束や、大気境界層上端での上昇流が生じる。本問では、連続の式を用いて、水平風の収束から鉛直風速を見積もってみよう。

気圧座標 (p 座標) において、連続の式は、

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0 \quad (1)$$

と書ける。ただし、 u 、 v 、 ω は風速の x 成分 (東西成分)、 y 成分 (南北成分)、 p 成分である。

(1) 1000 hPa 面で $\omega = 0$ であり、900 hPa 面から 1000 hPa 面までの水平発散 $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$ の平均値は $-9.8 \times 10^{-6} / \text{s}$ であるとする。900 hPa 面における ω の値を求めよ。単位は Pa/s、有効数字 2 けたで答えよ。また、符号にも注意せよ。

(2) 一般に、通常の高度座標 (z 座標) でみた上昇流 w と鉛直 p 速度 ω との関係は、

$$w = \frac{Dz}{Dt} = \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right)_p + \frac{\partial z}{\partial p} \frac{Dp}{Dt} = \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right)_p + \omega \frac{\partial z}{\partial p}$$

と書ける。等圧面高度が時間変化しない場合には、

$$\left(\frac{\partial z}{\partial t} \right)_p = 0$$

だから

$$w = \omega \frac{\partial z}{\partial p} \quad (2)$$

となる。また、静水圧平衡の関係は、

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

と書ける。ただし、 ρ は密度、 g は重力加速度であり、 $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ とする。この関係式は、逆関数の微分の公式より、

$$\frac{\partial z}{\partial p} = -\frac{1}{\rho g} = -\frac{\alpha}{g} \quad (3)$$

と書きかえられる。ここで、 α は比容 (密度の逆数) であり、900 hPa 面では $\alpha = 0.90 \text{ m}^3/\text{kg}$ とする。900 hPa 面高度が時間変化しない場合、 z 座標でみた、900 hPa 面での上昇流 w の値を、②、③を用いて計算せよ。ただし、上向きを正、単位は m/s とし、有効数字 2 けたで答えよ。

4. 温度風の関係について、以下の問いに答えよ。

地面との摩擦が効かない自由大気では、気圧座標（ p 座標）における運動方程式の y 成分（南北成分）は

$$\frac{D}{Dt}v = -fu - \frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

と書ける。ここで南北風 v は時間、場所によらずゼロであると仮定すると、

$$0 = -fu - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad (1)$$

が得られる。一方、静水圧平衡の関係は

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p} = -\alpha$$

であって、理想気体の状態方程式は

$$p\alpha = RT \quad (2)$$

であるから、

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p} = -\frac{RT}{p} \quad (3)$$

が成り立つ。ただし、 u 、 v は風速の x 成分（東西成分）、 y 成分（南北成分）、 Φ はジオポテンシャル、 T は温度、 α は比容（密度の逆数）である。また、 R は気体定数、 f はコリオリ係数（ $f > 0$ ）であり、いずれも一定の値をとる。

(1) ①、③を用いて、東西風の鉛直シア（圧力微分） $\frac{\partial u}{\partial p}$ を R 、 f 、 p 、 $\frac{\partial T}{\partial y}$ で表せ。

ヒント：①の両辺を p で、③の両辺を y で偏微分せよ。

(2) 冬季の中緯度域では対流圏上層の偏西風は通常、数十 m/s に達する。

(1) の結果を用いると、 $\frac{\partial T}{\partial y}$ の値から、 $\frac{\partial u}{\partial p}$ の値を計算することができる。北半球中緯度のある観測点では 500 hPa 面において、 $\frac{\partial T}{\partial y} = -1.0 \times 10^{-5} \text{ K/m}$ であった。このとき、 $\frac{\partial u}{\partial p}$ を求めよ。ただし、 $f = 1.0 \times 10^{-4} / \text{s}$ 、 $R = 2.87 \times 10^2 \text{ J/kg K}$ とする。解答は m/s Pa 単位で、有効数字 2 けたで示すこと。また、符号にも注意すること。

(3) 1000 hPa から 200 hPa の範囲で、 $\frac{\partial u}{\partial p}$ が (2) で求めた値をとるとき、200 hPa での東西風 u の値を求めよ。ただし、1000 hPa では $u = 0$ とする。解答は、国際単位系にしたがい、有効数字 2 けたで示すこと。