地球物理学（2018 年度春学期）（流体地球物理学分野）
最終テスト

注意：計算問題においては計算過程も示すこと。

１．ある平野を 10 m/s の風が一様に吹いている。この平野には A、B の２つの測定点があり、地上気温を測定している。ある時刻に、観測点 A で測定された気温は 25.0 ℃であった。同じ時刻に 10 km 風上に位置する観測点 B で測定された気温は 24.2 ℃であった。また、観測点 A、B とも気温は 10 分間に 0.3 K の割合で低下している。この平野での地上気温 T の水平勾配 ∇T は一様であるとして、以下の問いに答えよ。解答は、国際単位系（たとえば、温度の単位は K、時間の単位は s である）にしたがうこと。

（１）観測点 A における気温 T のオイラー微分 $\dfrac{\partial}{\partial t}T$ の値を求め、<u>有効数字１けた</u>で答えよ。符号に注意して解答せよ。

（２）水平風ベクトルを $\vec{u}$ としたとき、$\vec{u} \bullet \nabla T$ の値を計算し、<u>有効数字１けた</u>で答えよ。

（３）以上の小問の結果を用いて、気温 T のラグランジュ微分 $\dfrac{D}{Dt}T$ の値を求め、<u>有効数字１けた</u>で答えよ。

（余白）

２．プリミティブ方程式系の運動方程式を応用して、渦度に関する以下の問いに答えよ。

気圧座標（p 座標）における運動方程式の x 成分（東西成分）と y 成分（南北成分）は次のように書ける。

$$\frac{D}{Dt}u = fv - \frac{\partial \Phi}{\partial x} + F_x$$

$$\frac{D}{Dt}v = -fu - \frac{\partial \Phi}{\partial y} + F_y$$

ただし、u、v、Φ は、それぞれ東西風、南北風、ジオポテンシャルである。F_x、F_y は粘性の効果を表すが、以下では無視する。また、f はコリオリ係数であり、時間、場所によらず正の一定値をとる。ここで、運動量の移流の効果は無視できると仮定して、ラグランジュ微分をオイラー微分に置き換える。このとき、上記の運動方程式は

$$\frac{\partial}{\partial t}u = fv - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \qquad ①$$

$$\frac{\partial}{\partial t}v = -fu - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \qquad ②$$

と書ける。

（１）①の両辺を y で偏微分せよ。定数 f は微分演算子の前に出して記せ。

（２）②の両辺を x で偏微分せよ。定数 f は微分演算子の前に出して記せ。

（３）（１）、（２）で得られた２つの方程式の差を計算することによって、渦度 ξ（グザイ）$= \dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y}$ の時間微分 $\dfrac{\partial \xi}{\partial t}$ を求め、f、$\dfrac{\partial u}{\partial x}$、$\dfrac{\partial v}{\partial y}$ で表せ。

（4）コリオリ係数 f が定数ではなく、$f = f_0 + \beta y$（ただし f_0 と β は定数）と表わされるとき、①、②は

$$\frac{\partial}{\partial t}u = \left(f_0 + \beta y\right)v - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \qquad ①'$$

$$\frac{\partial}{\partial t}v = -\left(f_0 + \beta y\right)u - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \qquad ②'$$

と書き替えられる。①'、②' より、渦度 ξ の時間微分 $\dfrac{\partial \xi}{\partial t}$ を求め、$f_0 + \beta y$、$\dfrac{\partial u}{\partial x}$、$\dfrac{\partial v}{\partial y}$、$\beta v$ で表せ。

ヒント：$\left(f_0 + \beta y\right)u$ を x で偏微分すると、

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{\left(f_0 + \beta y\right)u\right\} = \left(f_0 + \beta y\right)\frac{\partial u}{\partial x}$$

であるが、$\left(f_0 + \beta y\right)v$ を y で偏微分すると、

$$\frac{\partial}{\partial y}\left\{\left(f_0 + \beta y\right)v\right\} = \left(f_0 + \beta y\right)\frac{\partial v}{\partial y} + \beta v$$

である。

３．熱力学方程式と、乾燥断熱減率、温位について、以下の問いに答えよ。

乾燥空気に関して、熱力学の第１法則は、次のように書ける。

$$d'Q = C_v dT + p d\alpha$$

ただし、T 、 p 、 α は、それぞれ温度、圧力、比容（密度の逆数）であり、すべて正の値をとる。また、C_v は定積比熱（$C_v > 0$）であり、一定値をとる。したがって、断熱（$d'Q = 0$）という条件のもとでは、

$$C_v dT + p d\alpha = 0 \qquad ①$$

が成り立つ。一方、乾燥空気を理想気体とみなせば、状態方程式は、

$$p\alpha = RT \qquad ②$$

と書ける。ただし、R は気体定数（$R > 0$）であり、一定値をとる。②の両辺を微分すると、

$$p d\alpha + \alpha dp = R dT$$

が得られる。これを①に代入すると、

$$C_v dT + R dT - \alpha dp = 0$$

$$C_p dT - \alpha dp = 0 \qquad ③$$

となる。ただし、C_p は定圧比熱であり、$C_p = C_v + R$ である。

（１）③より、$\dfrac{dT}{dp}$ を C_p と密度 ρ で表せ。ここで得られた解答は、気圧座標（p 座標）で表した乾燥断熱減率である。

（２）静水圧平衡より、

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g \qquad ④$$

が成り立つ。ただし、g は重力加速度である。（１）の結果と④を用いて、$\dfrac{dT}{dz}$ を C_p と g で表せ。符号に注意して解答せよ。

（３）物理量θをTとpの関数として

$$\theta = T\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\kappa} \tag{⑤}$$

と定義する。ただし、κは定数である。また、p_0は基準となる圧力であり、これも定数である。このとき、θの微分$d\theta$は

$$d\theta = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\kappa} dT + \frac{T\kappa}{p}\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\kappa} dp = \theta\left(\frac{1}{T}dT + \frac{\kappa}{p}dp\right) \tag{⑥}$$

と書ける。一方、②と③より、断熱という条件のもとでは、

$$C_p dT - \frac{RT}{p}dp = 0 \tag{⑦}$$

が成り立つ。⑥と⑦を比べることによって、断熱という条件のもとで物理量θが保存量になるようにκの値を定め、C_pとRで表せ。符号に注意して解答せよ。

地球物理学（2018 年度春学期）（流体地球物理学分野）
最終テスト　解答用紙（１）

学生番号：＿＿＿＿＿＿＿＿　**氏名**：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

１．（１）

固定された観測点で、10 分あたり 0.3 K の割合で気温が低下したから、

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{0.3}{10\times 60} = \underline{-5\times 10^{-4}\ [\mathrm{K/s}]}$$

（１０）

（２）

$\vec{u}$ の方向に x 軸をとると、

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{25.0-24.2}{10\times 10^{3}} = 8\times 10^{-5}\ [\mathrm{K/m}]$$

だから、

$$\vec{u}\bullet\nabla T = 10\times\left(8\times 10^{-5}\right) = \underline{8\times 10^{-4}\ [\mathrm{K/s}]}$$

（１０）

（３）

$\frac{D}{Dt}T = \frac{\partial}{\partial t}T + \vec{u}\bullet\nabla T$ だから、

$$\frac{D}{Dt}T = -5\times 10^{-4} + 8\times 10^{-4} = \underline{3\times 10^{-4}\ [\mathrm{K/s}]}$$

（１０）

（余白）

地球物理学（2018 年度春学期）（流体地球物理学分野）
最終テスト　解答用紙（２）

学生番号：______________　**氏名**：____________________

２．（１）

①の両辺を y で偏微分して、

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)=f\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y} \qquad ③$$

（１０）

（２）

②の両辺を x で偏微分して、

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)=-f\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y} \qquad ④$$

（１０）

（３）

④－③を計算すると、

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)=-f\frac{\partial u}{\partial x}-f\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)=-f\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

したがって、

$$\frac{\partial \xi}{\partial t}=-f\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

（１０）

（４）

①’の両辺を y で偏微分して、

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\{(f_0+\beta y)v\}-\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)=(f_0+\beta y)\frac{\partial v}{\partial y}+\beta v-\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y} \qquad ③'$$

②’の両辺を x で偏微分して、

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)=-(f_0+\beta y)u-\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y} \qquad ④'$$

④’－③’を計算すると、

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)=-(f_0+\beta y)\frac{\partial u}{\partial x}-(f_0+\beta y)\frac{\partial v}{\partial y}-\beta v$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)=-(f_0+\beta y)\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)-\beta v$$

したがって、

$$\underline{\frac{\partial \xi}{\partial t}=-(f_0+\beta y)\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)-\beta v}$$

（１０）

地球物理学（2018 年度春学期）（流体地球物理学分野）
最終テスト　解答用紙（３）

学生番号：＿＿＿＿＿＿＿　**氏名**：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

３．（１）

③より、

$$\frac{dT}{dp}=\frac{\alpha}{C_p}$$

だから、$\alpha=\dfrac{1}{\rho}$ より、

$$\underline{\frac{dT}{dp}=\frac{1}{C_p\rho}}$$

（１０）

（２）

（１）の結果と④より、

$$\begin{aligned}\frac{dT}{dz}&=\frac{dT}{dp}\times\frac{dp}{dz}\\&=\frac{1}{C_p\rho}\times\left(-\rho g\right)\\&=\underline{-\frac{g}{C_p}}\end{aligned}$$

（１０）

（３）

⑥より、物理量θが保存量であるためには、

$$d\theta = \theta\left(\frac{1}{T}dT + \frac{\kappa}{p}dp\right) = 0$$

$$\frac{1}{T}dT + \frac{\kappa}{p}dp = 0 \qquad ⑧$$

⑦をみたすすべてのdT、dpが⑧を常にみたすためには、dTとdpにかかる係数の比が、⑦と⑧の間で等しくなければならないから、

$$-\frac{RT}{C_p p} = \frac{\kappa T}{p}$$

したがって、

$$\underline{\kappa = -\frac{R}{C_p}}$$

地球物理学（2019 年度春学期）（流体地球物理学分野）
最終テスト

注意：計算問題においては計算過程も示すこと。

１．黒潮のような暖流は、特に冬季においては大気を強く加熱する効果を持つ。このことは、逆に海水が大気によって冷却されていることを意味する。ある海域において、固定された観測点 A で海面付近の水温を観測したところ、水温は時間変化せず一定であった。一方、この海域では、1 m/s の海流が観測された。また、観測点 A 周辺の海面付近の水温の水平分布を調べたところ、上流から下流に向かって 100 km につき 0.2 K の割合で水温が低下していた。この海域での水温の水平勾配 ∇T や流速ベクトル $\vec{u}$ は一様であり、また、鉛直流はゼロであるとして、以下の問いに答えよ。解答は、国際単位系（たとえば、長さの単位は m である）にしたがうこと。（１）は結果のみを記せばよい。

（１）観測点 A における水温 T のオイラー微分 $\dfrac{\partial}{\partial t}T$ の値を答えよ。

（２）観測点 A における $\vec{u} \bullet \nabla T$ の値を計算し、有効数字１けたで答えよ。符号に注意すること。

（３）以上の小問の結果を用いて、観測点 A における水温 T のラグランジュ微分 $\dfrac{D}{Dt}T$ の値を求め、有効数字１けたで答えよ。符号に注意すること。

２．大気の運動エネルギーについて、以下の問いに答えよ。

地面との摩擦が効かない自由大気では、気圧座標（p 座標）における運動方程式の x 成分（東西成分）と y 成分（南北成分）はそれぞれ、次のように書ける。

$$\frac{D}{Dt}u = fv - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \qquad ①$$

$$\frac{D}{Dt}v = -fu - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \qquad ②$$

ただし、u は東西風、v は南北風、Φ はジオポテンシャルである。また、f はコリオリ係数（$f > 0$）で一定の値をとる。以下、鉛直流はゼロとし、特定の等圧面内で大気の運動を考える。

（１）一般にスカラーの物理量 $a = a(x, y, t)$ について、

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{a^2}{2}\right) = a\frac{D}{Dt}a \qquad ③$$

が成り立つ。①、②より、運動エネルギー $K = \frac{1}{2}\left(u^2 + v^2\right)$ のラグランジュ微分

$$\frac{D}{Dt}K = \frac{D}{Dt}\left(\frac{u^2 + v^2}{2}\right) = u\frac{D}{Dt}u + v\frac{D}{Dt}v \qquad ④$$

を計算し、時間微分を含まない形で表せ。ただし、∇ を用いて

$$u\frac{\partial \Phi}{\partial x} + v\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \vec{u} \bullet \nabla \Phi \qquad ⑤$$

と表してよい。

（２）地面との摩擦などの外力を考慮し、運動方程式を次のように書く。

$$\frac{D}{Dt}u = fv - \frac{\partial \Phi}{\partial x} - ru \qquad ⑥$$

$$\frac{D}{Dt}v = -fu - \frac{\partial \Phi}{\partial y} - rv \qquad ⑦$$

ただし、r は正の定数である。このとき、運動エネルギーのラグランジュ微分 $\frac{D}{Dt}K$ を計算し、$\vec{u} \bullet \nabla \Phi$ 、K 、r を用いて表せ。

ヒント : 質点の運動の速さが 0.9 倍になると、運動エネルギーは 0.81 倍になる。

３．連続の式について、以下の問いに答えよ。

気圧座標（p 座標）において、連続の式は

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial \omega}{\partial p}=0 \qquad ①$$

と書ける。ただし、u、v、ω は風速の x 成分（東西成分）、y 成分（南北成分）、p 成分である。

（１）ある観測点では現在の地表面気圧が 1000.00 hPa であり、1 時間に 0.72 hPa の割合で低下している。観測点においては地表付近の水平風速はゼロとする。地表面における ω の値 ω_s を求めよ。単位は Pa/s（hPa ではなく Pa、/h ではなく/s である点に注意せよ）、有効数字２けたで答えよ。符号にも注意すること。

ヒント：地上付近の空気は、現在は 1000.00 hPa 面に存在しているが、1 時間後には 999.28 hPa 面に移動する。この移動が、風速の p 成分 ω に対応する。

（２）200 hPa 面で $\omega=0$ である。200 hPa 面から 1000 hPa 面まで水平発散 $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}$ の値が一定であるという仮定のもとで、この範囲での水平発散の値を求めよ。解答は、国際単位系（たとえば、時間の単位は s である）にしたがい、有効数字２けたまで示すこと。

ヒント:①を p について $p_1=200\,\mathrm{hPa}$ から $p_2=1000\,\mathrm{hPa}$ まで積分せよ。

４．温度風の関係について、以下の問いに答えよ。

地面との摩擦が効かない自由大気では、気圧座標（ p 座標）における運動方程式の y 成分（南北成分）は

$$\frac{D}{Dt}v = -fu - \frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

と書ける。ここで南北風 v は時間、場所によらずゼロであると仮定すると、

$$0 = -fu - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \qquad ①$$

が得られる。一方、静水圧平衡の関係は

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p} = -\alpha$$

であって、理想気体の状態方程式は

$$p\alpha = RT \qquad ②$$

であるから、

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p} = -\frac{RT}{p} \qquad ③$$

が成り立つ。ただし、u 、v は風速の x 成分（東西成分）、y 成分（南北成分）、Φ はジオポテンシャル、T は温度、α は比容（密度の逆数）である。また、R は気体定数、 f はコリオリ係数（ $f>0$ ）であり、いずれも一定の値をとる。

（１）①、③を用いて、東西風の鉛直シア（圧力微分）$\frac{\partial u}{\partial p}$ を R 、f 、p 、$\frac{\partial T}{\partial y}$ で表せ。

ヒント：①の両辺を p で、③の両辺を y で偏微分せよ。

（２）$\Phi = gz$ であることを考慮すると、静水圧平衡の関係は

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{g}{\alpha} \qquad ④$$

と書ける。ただし、g は重力加速度、z は高度である。（１）の結果と④から $\frac{\partial u}{\partial z}$ を求め、さらに②を使って、$\frac{\partial u}{\partial z}$ を g 、 f 、T 、 $\frac{\partial T}{\partial y}$ で表せ。

（３）（２）の結果を用いると、高層気象観測によって得られた $\frac{\partial u}{\partial z}$ の値から、 $\frac{\partial T}{\partial y}$ を求めることができる。北半球中緯度のある観測点では 500 hPa 面において、$\frac{\partial u}{\partial z} = 5.0 \times 10^{-3}$ /s、$T = 2.6 \times 10^{2}$ K であった。このとき、$\frac{\partial T}{\partial y}$ を求めよ。ただし、 $f = 1.0 \times 10^{-4}$ /s 、 $g = 1.0 \times 10$ m/s^2 とする。解答は、国際単位系（たとえば、長さの単位は m である）にしたがい、有効数字２けたまで示すこと。符号にも注意すること。

地球物理学（2019 年度春学期）（流体地球物理学分野）
最終テスト　解答用紙（１）

学生番号：＿＿＿＿＿＿＿＿　**氏名**：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

１．（１）

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \underline{0\,[\mathrm{K/s}]}$$

（１０）

（２）

海流の向きに x 軸をとり、海流の流速を u とすると、

$u = 1\,[\mathrm{m/s}]$、$\dfrac{\partial T}{\partial x} = \dfrac{-0.2}{100 \times 10^{3}} = -2 \times 10^{-6}\,[\mathrm{K/m}]$だから、

$$\vec{u} \bullet \nabla T = u\frac{\partial T}{\partial x} = 1 \times \left(-2 \times 10^{-6}\right) = \underline{-2 \times 10^{-6}\,[\mathrm{K/s}]}$$

（１０）

（３）

$\dfrac{D}{Dt}T = \dfrac{\partial}{\partial t}T + \vec{u} \bullet \nabla T$ だから、

$$\frac{D}{Dt}T = 0 - 2 \times 10^{-6} = \underline{-2 \times 10^{-6}\,[\mathrm{K/s}]}$$

（１０）

２．（１）

④より、

$$\frac{D}{Dt}K = u\frac{D}{Dt}u + v\frac{D}{Dt}v$$

①、②を代入して、

$$\begin{aligned}\frac{D}{Dt}K &= fuv - u\frac{\partial\Phi}{\partial x} - fuv - v\frac{\partial\Phi}{\partial y} \\ &= -u\frac{\partial\Phi}{\partial x} - v\frac{\partial\Phi}{\partial y} \\ &= \underline{-\vec{u}\bullet\nabla\Phi}\end{aligned}$$

（１０）

（２）

④より、

$$\frac{D}{Dt}K = u\frac{D}{Dt}u + v\frac{D}{Dt}v$$

⑥、⑦を代入して、

$$\begin{aligned}\frac{D}{Dt}K &= fuv - u\frac{\partial\Phi}{\partial x} - ru^2 - fuv - v\frac{\partial\Phi}{\partial y} - rv^2 \\ &= -u\frac{\partial\Phi}{\partial x} - v\frac{\partial\Phi}{\partial y} - r\left(u^2 + v^2\right) \\ &= -\vec{u}\bullet\nabla\Phi - r\left(u^2 + v^2\right)\end{aligned}$$

$K = \dfrac{1}{2}\left(u^2 + v^2\right)$だから、

$$\frac{D}{Dt}K = \underline{-\vec{u}\bullet\nabla\Phi - 2rK}$$

（１０）

地球物理学（2019 年度春学期）（流体地球物理学分野）
最終テスト　解答用紙（２）

学生番号：＿＿＿＿＿＿＿　**氏名**：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

３．（１）

3.6×10^3 s の間に 0.72×10^2 Pa だけ気圧が低下しているから、

$$\omega_s = \frac{-0.72\times10^2}{3.6\times10^3} = \underline{-2.0\times10^{-2}\ \ [\mathrm{Pa/s}]}$$

（１０）

（２）

①を p について $p_1 = 200$ hPa から $p_2 = 1000$ hPa まで積分すると、

$$\int_{p_1}^{p_2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)dp + \int_{p_1}^{p_2}\frac{\partial \omega}{\partial p}dp = 0$$

$$(p_2 - p_1)\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \omega(p = p_2) - \omega(p = p_1) = 0$$

$p = p_1$ で $\omega = 0$、$p = p_2$ で $\omega = \omega_s$ だから、

$$(p_2 - p_1)\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \omega_s = 0$$

したがって、

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\omega_s}{p_2 - p_1} = -\frac{-2.0\times10^{-2}}{(1000-200)\times10^2}$$

$$= \underline{2.5\times10^{-7}\ \ [/\mathrm{s}]}$$

（１０）

（余白）

地球物理学（2019 年度春学期）（流体地球物理学分野）
最終テスト　解答用紙（３）

学生番号：＿＿＿＿＿＿＿＿＿　**氏名**：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

４．（１）

①の両辺を p で偏微分すると、

$$0 = -f\frac{\partial u}{\partial p} - \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)$$

$$f\frac{\partial u}{\partial p} + \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) = 0 \qquad ①'$$

一方、③の両辺を y で偏微分すると、

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial p}\right) = -\frac{R}{p}\frac{\partial T}{\partial y}$$

偏微分の順序を入れ替えて、

$$\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) = -\frac{R}{p}\frac{\partial T}{\partial y} \qquad ③'$$

①’、③’より、

$$f\frac{\partial u}{\partial p} - \frac{R}{p}\frac{\partial T}{\partial y} = 0$$

$$\underline{\frac{\partial u}{\partial p} = \frac{R}{fp}\frac{\partial T}{\partial y}}$$

（２）

合成関数の微分の公式より、

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial u}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial z}$$

（１）の結果と④を代入すると、

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\left(\frac{R}{fp}\frac{\partial T}{\partial y}\right)\left(-\frac{g}{\alpha}\right)=-\frac{Rg}{fp\alpha}\frac{\partial T}{\partial y}$$

②より、$p\alpha=RT$ だから、

$$\underline{\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{g}{fT}\frac{\partial T}{\partial y}}$$

（１０）

（３）

（２）の結果より、

$$\frac{\partial T}{\partial y}=-\frac{fT}{g}\frac{\partial u}{\partial z}$$

だから、

$$\frac{\partial T}{\partial y}=-\frac{1.0\times10^{-4}\times2.6\times10^{2}}{1.0\times10}\times5.0\times10^{-3}$$
$$=\underline{-1.3\times10^{-5}\ [\mathrm{K/m}]}$$

（１０）

地球物理学（2020 年度春学期）（流体地球物理学分野）
最終テスト

注意：計算問題においては計算過程も示すこと。

１．ある平野を 10 m/s の風が一様に吹いている。この平野には A、B の２つの測定点があり、地上気温と相対湿度、気圧を測定している。気温と湿度、気圧から、比湿（単位質量の空気に含まれる水蒸気の質量）を計算することができる。ある時刻に観測点 A で求められた比湿は1.20×10^{-2}（＝12.0 g/kg）であった。同じ時刻に 10 km 風上に位置する観測点 B で求められた比湿は1.14×10^{-2}（＝11.4 g/kg）であった。また、観測点 A、B とも比湿は 10 分間に3×10^{-4}（＝0.3 g/kg）の割合で低下している。この平野での地上の比湿qの水平勾配∇qは一様であるとして、以下の問いに答えよ。解答は、国際単位系（たとえば、時間の単位は s である）に従うこと。

（１）観測点 A における比湿qのオイラー微分$\dfrac{\partial}{\partial t}q$の値を求め、<u>有効数字１けた</u>で答えよ。符号に注意して解答せよ。

（２）水平風ベクトルを$\vec{u}$としたとき、$\vec{u}\bullet\nabla q$の値を計算し、<u>有効数字１けた</u>で答えよ。

（３）以上の小問の結果を用いて、比湿qのラグランジュ微分$\dfrac{D}{Dt}q$の値を計算し、<u>有効数字１けた</u>で答えよ。

（余白）

２．プリミティブ方程式系の運動方程式を応用して、渦度と発散に関する以下の問いに答えよ。

気圧座標（p 座標）における運動方程式の x 成分（東西成分）と y 成分（南北成分）を次のように書く。

$$\frac{D}{Dt}u = fv - \frac{\partial \Phi}{\partial x}$$

$$\frac{D}{Dt}v = -fu - \frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

ただし、u、v、Φ は、それぞれ東西風、南北風、ジオポテンシャルである。f はコリオリ係数であり、正の定数とする。ここで、運動量の移流の効果は無視できると仮定して、ラグランジュ微分をオイラー微分に置き換えると、

$$\frac{\partial}{\partial t}u = fv - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad ①$$

$$\frac{\partial}{\partial t}v = -fu - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad ②$$

が得られる。さらに、摩擦の効果を考慮して、①、②を

$$\frac{\partial}{\partial t}u = fv - \frac{\partial \Phi}{\partial x} - ru \quad ③$$

$$\frac{\partial}{\partial t}v = -fu - \frac{\partial \Phi}{\partial y} - rv \quad ④$$

と書きかえる。ここで、r は正の定数であり、右辺第３項が摩擦の効果を表している。

（１）③の両辺を y で偏微分し、また、④の両辺を x で偏微分し、両者の差を計算することによって、渦度 $\overset{グザイ}{\xi} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$ の時間微分 $\frac{\partial \xi}{\partial t}$ を求め、f、$\frac{\partial u}{\partial x}$、$\frac{\partial v}{\partial y}$、$r$、$\xi$ を用いて表せ。

（２）小問（１）で得られた方程式において、定常を仮定し、時間微分をゼロにすることによって、水平発散 $D = \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y}$ を求め、f 、r 、ξ を用いて表せ。ここで解答として得られる方程式は、低気圧性の渦に摩擦が働くと水平収束が生じることを表している。

３．連続の式について、以下の問いに答えよ。

局地的に地表面の温度が高くなると、大気境界層とよばれる対流圏の下部の大気が加熱され、大気境界層ないでの水平風の収束や、大気境界層上端での上昇流が生じる。本問では、連続の式を用いて、水平風の収束から鉛直風速を見積もってみよう。

気圧座標（ p 座標）において、連続の式は、

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial \omega}{\partial p}=0 \qquad ①$$

と書ける。ただし、u 、v 、ω は風速の x 成分（東西成分）、 y 成分（南北成分）、 p 成分である。

（１）1000 hPa 面で $\omega=0$ であり、900 hPa 面から 1000 hPa 面までの水平発散 $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}$ の平均値は -4.9×10^{-5} /s であるとする。900 hPa 面における ω の値を求めよ。単位は hPa/s、有効数字２けたで答えよ。通常の高度座標（ z 座標）では上昇流、つまり、ω （鉛直 p 速度）は負になっているはずである。符号に注意して解答せよ。

（２）一般に、通常の高度座標（z 座標）でみた上昇流 w と鉛直 p 速度 ω との関係は、

$$w = \frac{Dz}{Dt} = \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_p + \frac{\partial z}{\partial p}\frac{Dp}{Dt} = \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_p + \omega\frac{\partial z}{\partial p}$$

と書ける。等圧面高度が時間変化しない場合には、

$$\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_p = 0$$

だから

$$w = \omega\frac{\partial z}{\partial p} \qquad ②$$

となる。また、静水圧平衡の関係は、

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

と書ける。ただし、ρ は密度、g は重力加速度であり、$g = 9.8\,\mathrm{m/s^2}$ とする。この関係式は、逆関数の微分の公式より、

$$\frac{\partial z}{\partial p} = -\frac{1}{\rho g} \qquad ③$$

と書きかえられる。ここで、900 hPa 面では $\rho = 1.0\,\mathrm{kg/m^3}$ とする。900 hPa 面高度が時間変化しない場合、z 座標でみた、900 hPa 面での上昇流 w の値を、②、③を用いて計算せよ。ただし、上向きを正、単位は m/s とし、有効数字２けたで答えよ。②に ω の値を代入するときには、単位を Pa/s に換算する必要があることに注意せよ（1 hPa ＝ 100 Pa）。

４. 熱力学方程式と、乾燥断熱減率、温位について、以下の問いに答えよ。

乾燥空気に関して、熱力学の第１法則は、次のように書ける。

$$d'Q = C_v dT + p d\alpha$$

ただし、T、p、α は、それぞれ温度、圧力、比容（密度 ρ の逆数）であり、すべて正の値をとる。また、C_v は定積比熱（$C_v > 0$）であり、一定値をとる。したがって、断熱（$d'Q = 0$）という条件のもとでは、

$$C_v dT + p d\alpha = 0 \quad ①$$

が成り立つ。一方、乾燥空気を理想気体とみなせば、状態方程式は、

$$p\alpha = RT \quad ②$$

と書ける。ただし、R は気体定数（$R > 0$）であり、一定値をとる。②の両辺を微分すると、

$$p d\alpha + \alpha dp = R dT$$

が得られる。これを①に代入すると、

$$C_v dT + R dT - \alpha dp = 0$$

$$C_p dT - \alpha dp = 0 \quad ③$$

となる。ただし、C_p は定圧比熱であり、$C_p = C_v + R$ である。

（１）③より、$\dfrac{dT}{dz}$ を求め、C_p と重力加速度 g を用いて表せ。ただし、静水圧平衡の関係

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g \quad ④$$

を用いてよい。ここで得られた解答は、乾燥断熱減率に関連している。符号に注意して解答せよ。

（２）温位θは、Tとpの関数として

$$\theta = T\left(\frac{p}{p_0}\right)^{-\frac{R}{C_p}} \qquad ⑤$$

と定義される。ただし、p_0は基準となる圧力であり、定数である。等温大気（温度Tが一定の大気）において、温位θの圧力微分$\dfrac{d\theta}{dp}$をR、C_p、θ、pで（p_0を含まない形で）表せ。符号に注意せよ。

（３）等温大気（温度Tが一定の大気）において、温位θの高度微分$\dfrac{d\theta}{dz}$をg、C_p、θ、Tで（p_0を含まない形で）表せ。対流圏では、通常は、上空に行くほど気温が低くなっているので、等温大気は、通常よりも安定度の高い大気とみなすことができる。

地球物理学（2020 年度春学期）（流体地球物理学分野）
最終テスト　解答用紙（１）

学生番号：＿＿＿＿＿＿＿＿　**氏名**：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

１．（１）

固定された測定点で、10 分あたり 3×10^{-4} の割合で比湿が低下したから、

$$\frac{\partial q}{\partial t} = -\frac{3\times10^{-4}}{10\times60} = \underline{-5\times10^{-7}\ [/\mathrm{s}]}$$

（１０）

（２）

$\vec{u}$ の方向に x 軸をとると、

$$\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{1.20\times10^{-2} - 1.14\times10^{-2}}{10\times10^{3}} = 6\times10^{-8}\ [/\mathrm{m}]$$

だから、

$$\vec{u}\bullet\nabla q = 10\times\left(6\times10^{-8}\right) = \underline{6\times10^{-7}\ [/\mathrm{s}]}$$

（１０）

（３）

$\frac{D}{Dt}q = \frac{\partial}{\partial t}q + \vec{u}\bullet\nabla q$ だから、

$$\frac{D}{Dt}q = -5\times10^{-7} + 6\times10^{-7} = \underline{1\times10^{-7}\ [/\mathrm{s}]}$$

（１０）

２．（１）

③の両辺を y で偏微分して、

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = f\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) - r\frac{\partial u}{\partial y} \qquad ③'$$

④の両辺を x で偏微分して、

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right) = -f\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) - r\frac{\partial v}{\partial x} \qquad ④'$$

④’－③’を計算すると、

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = -f\frac{\partial u}{\partial x} - f\frac{\partial v}{\partial y} - r\frac{\partial v}{\partial x} + r\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = -f\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) - r\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

したがって、

$$\underline{\frac{\partial \xi}{\partial t} = -f\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) - r\xi}$$

（１０）

（２）

（１）の解答において、時間微分をゼロとすると、

$$0 = -f\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) - r\xi$$

だから、

$$f\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = -r\xi$$

$$\underline{D = -\frac{r}{f}\xi}$$

（１０）

地球物理学（2020 年度春学期）（流体地球物理学分野）
最終テスト　解答用紙（２）

学生番号：______________　**氏名**：____________________

３．（１）

①を p について $p_1 = 900$ hPa から $p_2 = 1000$ hPa まで積分すると、

$$\int_{p_1}^{p_2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dp + \int_{p_1}^{p_2} \frac{\partial \omega}{\partial p} dp = 0$$

$p = p_2$ で $\omega = 0$ だから、

$$\left(p_2 - p_1\right) \overline{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)} - \omega\left(p = p_1\right) = 0$$

したがって、

$$\omega\left(p = p_1\right) = \left(p_2 - p_1\right) \overline{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)} = (1000 - 900) \times \left(-4.9 \times 10^{-5}\right)$$

$$= \underline{-4.9 \times 10^{-3}\ \ [\mathrm{hPa/s}]}$$

（１０）

（２）

②、③より、

$$w = \omega \frac{\partial z}{\partial p} = \omega \times \left(-\frac{1}{\rho g} \right) = -\frac{\omega}{\rho g}$$

$\omega = -4.9 \times 10^{-1}$ Pa/s 、$\rho = 1.0\ \mathrm{kg/m^3}$、$g = 9.8\ \mathrm{m/s^2}$ を代入すると、

$$w = -\frac{-4.9 \times 10^{-1}}{1.0 \times 9.8} = \underline{5.0 \times 10^{-2}\ [\mathrm{m/s}]}$$

（１０）

４．（１）

③より、

$$\frac{dT}{dp}=\frac{\alpha}{C_p}=\frac{1}{C_p\rho}$$

だから、合成関数の微分の公式と④より、

$$\frac{dT}{dz}=\frac{dT}{dp}\frac{dp}{dz}=\frac{1}{C_p\rho}\left(-\rho g\right)=\underline{-\frac{g}{C_p}}$$

（１０）

（２）

$$\frac{d\theta}{dp}=-T\frac{R}{C_p}\frac{1}{p}\left(\frac{p}{p_0}\right)^{-\frac{R}{C_p}}=\underline{-\frac{R}{C_p}\frac{\theta}{p}}$$

（１０）

（３）

$$\frac{d\theta}{dz}=\frac{d\theta}{dp}\frac{dp}{dz}=-\frac{R}{C_p}\frac{\theta}{p}\left(-\rho g\right)=\frac{R}{C_p}\frac{\rho g\theta}{p}$$

②より、

$$p=\rho RT$$

だから、

$$\frac{d\theta}{dz}=\frac{R}{C_p}\frac{\rho g\theta}{\rho RT}=\underline{\frac{g\theta}{C_pT}}$$

（１０）