

# 気象学のための数学

## 1 一次変換

ある行列をかけることによってベクトルを変換することを一次変換という。一次変換は座標系の回転などを表すためにしばしば使われる。ここでは一次変換による座標の変換を学ぶ。

### 1. 1 一次変換

ある正方行列  $A$  を用いて、あるベクトル  $\vec{x}$  を

$$\vec{y} = A\vec{x}$$

によってベクトル  $\vec{y}$  に変換するとき、この変換を行列  $A$  によって表わされる**一次変換**（線形変換）という。

例 1 :

$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  は、ある点を原点の周りに  $90^\circ$  回転する変換を表す。

例 2 :

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$  は、ある点を平面  $z = 0$  について対称な点に移動する変換を表す。

問 1. 次の一次変換を表す行列を求めよ。

- (1) 2次元平面において、ある点  $(x, y)$  を直線  $y = x$  について対称な点に移動する変換。
- (2) 3次元空間において、ある点  $(x, y, z)$  を、 $z$  軸の周りに ( $z$  軸正の方向からみて) 反時計回りに  $90^\circ$  回転した点に移動する変換。

### 1. 2 ユニタリ行列

座標系を回転する一次変換は次の性質を満たすと考えられる。

1. 任意のベクトルの大きさを変えない。
2. 任意の異なる2つのベクトルのなす角度を変えない。

一次変換を表す実行列を  $A$ 、任意の2つのベクトルを  $\vec{x}$ 、 $\vec{y}$  とすると、これらの性質を

$$(A\vec{x}) \cdot (A\vec{y}) = \vec{x} \cdot \vec{y}$$

と書くことができる。内積の定義より、左辺は、

$$(A\vec{x}) \cdot (A\vec{y}) = (\vec{x}^T A^T)(A\vec{y}) = \vec{x}^T (A^T A) \vec{y}$$

と変形できる。ただし、 $A^T$  は、行列  $A$  の行と列を入れ替えることによって得られる行列であり、**転置行列** という。任意の2つのベクトルを  $\vec{x}$ 、 $\vec{y}$  について、 $\vec{x}^T (A^T A) \vec{y} = \vec{x} \cdot \vec{y}$  となるためには、 $A^T A = E$  ( $E$  は単位行列) でなければならない。ここで、 $A^T A = A A^T = E$  を満たす行列を**直交行列**と定義する。

また、行列  $A$  の成分が複素数である場合に拡張して、行列  $A$  の行と列を入れ替え、さらに各成分を共役な複素数に置き換えることによって得られる行列を**随伴行列**といい、 $A^*$  と表す。 $A^* A = A A^* = E$  を満たす行列を**ユニタリ行列**と定義する。

一般に  $n$  次正方行列  $A$ 、 $B$  の転置行列、随伴行列について以下の関係が成り立つ。

$$(AB)^T = B^T A^T, (AB)^* = B^* A^*$$

$n$  次のユニタリ行列  $A$  を、 $A = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$  と表すと、

$$\vec{x}_i \cdot \vec{x}_j = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

が成り立つ。

問 2. 任意の正方行列  $A$ 、 $B$  について、 $(AB)^* = B^* A^*$  が成り立つことを証明せよ。

### 1. 3 直交変換

座標系を回転する一次変換は、直交行列によって表すことができる。直交行列によって表わされる一次変換を**直交変換**という。

たとえば、2次元平面において、ある点 $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を原点の周りに反時計回りに角度 $\theta$ だけ回転して点 $\vec{x}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ に移すような一次変換を考える。三角関数の加法定理より、このような変換は、

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

と書くことができる。この変換において、変換前の位置ベクトル $\vec{X} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ -\sin\theta \end{pmatrix}$ はx方向の単位ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ に、

$\vec{Y} = \begin{pmatrix} \sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$ はy方向の単位ベクトル $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ に変換される。2次元平面での直交変換は、たがいに直交するベクトルの組 $\{\vec{X}, \vec{Y}\}$ によって一意に定まる。このとき、直交変換を表す行列Aは、座標軸方向の単位ベクトルに変換されるベクトルの組 $\{\vec{X}, \vec{Y}\}$ を用いて、

$$A = \begin{pmatrix} \vec{X}^T \\ \vec{Y}^T \end{pmatrix}$$

と書くことができる。

3次元空間においても、直交変換は、変換によってx方向、y方向、z方向の単位ベクトルに変換される位置ベクトルの組 $\{\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}\}$ によって一意に定まり、この直交変換を表す行列Aは、

$$A = \begin{pmatrix} \vec{X}^T \\ \vec{Y}^T \\ \vec{Z}^T \end{pmatrix}$$

と書くことができる。

直交行列Aによって表わされる直交変換を行った後で、直交行列Bによって表わされる直交変換を行うような合成変換は、行列 $C = BA$ で表すことができる。このとき行列Cで表わされる合成変換も直交変換である。一般に、直交行列の積は直交行列である。

例1：3次元空間において、ある点 $(x, y, z)$ をz軸の周りに反時計回りに角度 $\theta$ だけ回転移動する変換を表す行列は、

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

である。

例2：3次元空間において、ある点 $(x, y, z)$ をz軸の周りに反時計回りに角度 $\theta$ だけ回転移動し、その後でさらに、x軸の周りに(x軸正の方向からみて)反時計回りに角度 $\phi$ だけ回転移動する変換を表す行列は、

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \cos\phi\sin\theta & \cos\phi\cos\theta & -\sin\phi \\ \sin\phi\sin\theta & \sin\phi\cos\theta & \cos\phi \end{pmatrix}$$

である。

問3. 次の直交変換を表す行列を求めよ。

- (1) 2次元平面において、ある点 $(x, y)$ を原点の周りに時計回りに $30^\circ$ だけ回転移動する変換。
- (2) 3次元空間において、ある点 $(x, y, z)$ をz軸の周りに(z軸正の方向からみて)反時計回りに $45^\circ$ だけ回転移動する変換。
- (3) 3次元空間において、ある点 $(x, y, z)$ をz軸の周りに(z軸正の方向からみて)反時計回りに $4$

5° だけ回転移動し、その後でさらに、x 軸の周りに (x 軸正の方向からみて) 反時計周りに 30° だけ回転移動する変換。

**課題:** 緯度  $\phi$  (°)、太陽の赤緯  $\delta$  (°) (天の赤道より北にあるとき正)、時角  $H$  (°) (南中時に 0°、6 時間後に 90°) を入力すると、太陽の高度 (°) を出力するプログラムを作成せよ。地球の公転面に対する地軸の傾きは 23.4° とする。FORTRAN においては、正弦関数  $\sin x$  は **SIN(X)**、余弦関数  $\cos x$  は **COS(X)**、正弦関数の逆関数  $\sin^{-1}x$  は **ASIN(X)** と書く。プログラム中では角度はラジアンである点に注意せよ。

ヒント: 赤緯-時角座標系から高度-方位座標系への変換を考える。高度-方位座標系に変換したときに真東、真南、真上方向の単位ベクトルになるようなベクトルは、赤緯-時角座標系においてどのように表されているか。