

# 気象学のための数学

## 2 逆行列

逆行列の計算は、連立一次方程式を数値的に解くために利用される。気象学の分野では線形系の応答問題を数値的に解くときに用いられることも多い。ここでは計算機を用いて逆行列を求める方法を学ぶ。

### 2.1 正則行列と逆行列

ある正方行列Aについて、

$$AX = XA = E \quad (E \text{ は } A \text{ と同じ型の単位行列})$$

となる正方行列Xが存在するとき、XをAの**逆行列**といい、 $A^{-1}$ で表す。

例1：

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ に対して、 } A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

例2：

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 9 \\ 1 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ に対して、 } A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -2 & 4 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

逆行列は常に存在するとは限らない。逆行列が存在する行列を**正則行列**という。

一般に、正則行列Aの逆行列 $A^{-1}$ も正則であり、

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

が成り立つ。また、2つの正則行列A、Bの積ABは正則であり、逆行列は、

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

である。

2次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  に対して、 $\Delta = ad - bc$  とおくと、

$$\Delta \neq 0 \text{ ならば、 } A \text{ は正則であり、 } A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$\Delta = 0$  ならば、Aは正則ではない。

問1. 以下の行列の逆行列を求めよ。

$$(1) \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$$

### 2.2 連立一次方程式と逆行列

逆行列を使って連立一次方程式を解くことを考える。たとえば、

$$\begin{cases} 2x + 6y + 9z = 3 \\ x + 4y + 6z = 1 \\ y + 2z = -2 \end{cases}$$

に関して、

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 9 \\ 1 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

とおくと、この連立一次方程式を

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

と表現することができる。ここで行列Aが正則であれば、

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$$

となり、逆行列 $A^{-1}$ とベクトル $\vec{b}$ の積を計算することによってベクトル $\vec{x}$ を求めることができる。上の例では、行列 $A$ は実際に正則であって、

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -2 & 4 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

だから、

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -2 & 4 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

となって、

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \\ z = -3 \end{cases}$$

であることが分かる。

問2. 以下の連立1次方程式を、逆行列を用いて解け。ただし、(3)では上の結果を用いてよい。

$$(1) \begin{cases} 7x + 5y = 9 \\ 3x + 2y = 4 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} 5x - 3y = 14 \\ 2x + y = -1 \end{cases} \quad (3) \begin{cases} 2x + 6y + 9z = 2 \\ x + 4y + 6z = 5 \\ y + 2z = -1 \end{cases}$$

### 2. 3 基本変形と階数

正方行列 $A$ に対して行われる、以下のような操作を**左基本変形**という。

1. 二つの行を入れ替える。
2. ある行に0でない数をかける。
3. ある行に他のある行の定数倍を加える。

これらの操作は、行列 $A$ に対して左からある正方行列 $P$ をかける演算として表現できる。このとき行列 $P$ を基本行列という。

例1：2行目と3行目を入れ替える。

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

例2：2行目に3をかける。

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

例3：3行目に2行目の4倍を加える。

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

同様に、以下のような操作を**右基本変形**という。

1. 二つの列を入れ替える。
2. ある列に0でない数をかける。
3. ある列に他のある列の定数倍を加える。

これらの操作は、行列 $A$ に対して右からある正方行列 $Q$ をかける演算として表現できる。行列 $Q$ も基本行列とよばれる。一般に基本行列は正則である。

任意の  $n$  次正方行列は、基本変形を何回か行なうことによって、以下のような標準形に変形することができる。

$$P_k \cdots P_2 P_1 A Q_1 Q_2 \cdots Q_l = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & r & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & n-r \\ & & & & & & & 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

このとき  $r$  を行列の**階数**という。一般に、行列の階数は一意に定まることが分かっている。階数が次数に等しければ、右辺は単位行列である。実は、階数が次数に等しい場合には、左基本変形か右基本変形のどちらか一方のみによって行列  $A$  を単位行列に変形できる。つまり、

$$P_m \cdots P_2 P_1 A = E$$

のように書くことができる。このとき、逆行列  $A^{-1} = P_m \cdots P_2 P_1$  が存在するから、行列  $A$  は正則である。逆に、一般に基本行列  $P, Q$  は正則だから、行列  $A$  が正則であれば、式 (1) において、 $P_k \cdots P_2 P_1 A Q_1 Q_2 \cdots Q_l$  も正則である。右辺が正則であるためには単位行列でなければならないから、階数は次数に等しい。つまり、

**正則である  $\Leftrightarrow$  逆行列が存在する  $\Leftrightarrow$  階数が次数に等しい**

問 3. 4 次の正方行列に対する、以下の右基本変形を表す基本行列を求めよ。

- (1) 1 列目と 3 列目を入れ替える。
- (2) 3 列目に  $-2$  をかける。
- (3) 4 列目に 2 列目の  $-3$  倍を加える。

## 2. 4 逆行列の計算

正則行列では階数が次数に等しいので、基本変形によって単位行列に変形できる。つまり、

$$P_m \cdots P_2 P_1 A = E$$

となる。ここで、逆行列の定義より、

$$P_m \cdots P_2 P_1 = A^{-1}$$

である。このことを利用して、逆行列を求めることができる。すなわち、行列  $A$  を単位行列  $E$  に変形するための基本変形を、単位行列に対しても同様に行えば逆行列が得られる。

例 :  $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 9 \\ 1 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$  の逆行列を求める。

まず、行列  $A$  と単位行列  $E$  を並べて書く。

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 9 \\ 1 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

はじめに、1 行目を  $1/2$  倍する。

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 9/2 \\ 1 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

次に、1 行目の  $-1$  倍を 2 行目に加える。

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 9/2 \\ 0 & 1 & 3/2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2 行目の  $-3$  倍を 1 行目に、 $-1$  倍を 3 行目に加える。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

3行目を2倍する。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

3行目の $-3/2$ 倍を2行目に加える。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -2 & 4 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

したがって、

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -2 & 4 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

以上の操作をまとめると、次のようになる。

1.  $n$ 次正方行列 $A$ に関して、左側に行列 $A$ 、右側に同じ型の単位行列を書く。
2.  $m = 1, \dots, n$ について以下の操作を反復する。両方の行列に対して同じ操作を行う。
  - a. 各行列の第 $m$ 行に $1 /$  (左側の行列の $(m, m)$ 成分) をかける。
  - b. 各行列の第 $m$ 行以外のすべての行 (第1行) について、その行列の第 $m$ 行の $-$  (左側の行列の $(1, m)$ 成分) 倍を、その行列の第1行に加える。

左側の行列の $(m, m)$ 成分がゼロになった場合は、他の行との入れ替えが必要である。どの行と入れ替えても左側の行列の $(m, m)$ 成分をゼロ以外の値にすることができない場合、つまり、左側の行列の第 $m$ 列がすべてゼロである場合は、正則ではなく、逆行列は存在しない。

右基本変形によっても同様にして逆行列を求めることができる。ただし、左基本変形と右基本変形の両方を同時に用いてはならない。

問4. 次の行列の逆行列を求めよ。

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -3 & -4 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} -2 & 4 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## 2. 5 行列式

正方行列が正則であるか判定するために**行列式**を用いることができる。2次の正方行列の逆行列の計算においては $\Delta = ad - bc$  という量が重要な意味を持っていた。以下では、 $\Delta$ に相当する量を行列式と呼ぶことにして、3次以上の正方行列についても、行列式を定義することができないか考えてみる。行列 $A$ の行列式を $|A|$  または  $\det A$  と書き、次のように定義する。

2次の正方行列の場合、 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$  に対して、 $|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$  である。

3次の正方行列の場合、 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$  に対して、

$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$  である。

$$\text{例1 : } \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 1, \quad \text{例2 : } \det \begin{pmatrix} 2 & 6 & 9 \\ 1 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 1$$

一般に、 $n$ 次の正方行列に対しては、**置換**を用いて行列式を定義する。置換とは $n$ 個の自然数が並んだ数列 $\{1, 2, \dots, n\}$ を何回か並べ替える操作のことである。例えば、 $n = 4$ の場合、

数列  $\{1, 2, 3, 4\}$

↓ 2番目の要素と3番目の要素を入れ替える

数列  $\{1, 3, 2, 4\}$

↓ 3番目の要素と4番目の要素を入れ替える

数列 {1, 3, 4, 2}

のような置換を行なうことができる。このとき、置換  $\sigma$  を  $\sigma(1) = 1, \sigma(2) = 3, \sigma(3) = 4, \sigma(4) = 2$  のように表す。一般に、 $n$  個の要素の置換は  $n!$  個存在する。偶数回の並べ替えによって表現される置換を偶置換、奇数回の並べ替えによって表現される置換を奇置換という。さらに置換  $\sigma$  の符号  $\text{sgn } \sigma$  を、 $\sigma$  が偶置換のとき  $\text{sgn } \sigma = 1$ 、奇置換のとき  $\text{sgn } \sigma = -1$  と定義する。このとき、 $n$  次の正方行列の行列式は、

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn } \sigma \cdot x_{1\sigma(1)} \cdot x_{2\sigma(2)} \cdots x_{n\sigma(n)}$$

と定義される。ここで、 $\sum_{\sigma \in S_n}$  は  $n$  個の要素に対する置換すべてに関する和を表す。

例 :  $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 - 6 = -5$

行列式に関しては以下の性質が成り立っている。

$$|A| |B| = |AB|$$

ここで、行列  $A$  に逆行列  $A^{-1}$  が存在するとする。このとき

$$AA^{-1} = E$$

が成り立つ。両辺の行列式を計算すると、

$$|A| |A^{-1}| = |AA^{-1}| = |E| = 1$$

したがって、 $|A| |A^{-1}| \neq 0$  より  $|A| \neq 0$  である。すなわち、行列  $A$  の逆行列  $A^{-1}$  が存在すれば、行列式  $|A|$  の値はゼロではない。また、逆に、行列  $A$  の行列式  $|A|$  の値がゼロでなければ、逆行列  $A^{-1}$  が存在することも分かっている。つまり、

**正則である ⇔ 逆行列が存在する**

**⇔ 階数が次数に等しい ⇔ 行列式がゼロではない**

問5. 以下の行列の行列式を計算し、逆行列の有無を判定せよ。

(1)  $\begin{pmatrix} -2 & 4 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$  (2)  $\begin{pmatrix} -2 & 4 & -3 \\ -2 & 4 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$  (3)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  (4)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \\ 4 & 2 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

**課題:** ①任意の正則な4次正方行列について、左基本変形によって逆行列を求めるプログラムを作成せよ。与える行列は正則であることを前提としてよい。また、基本変形の過程で「行の入れ替え」の必要は生じないことも前提としてよい。逆行列を求めるプログラムは `INVMTX` という名前のサブルーチン (C の場合は `invmtx` という名前の関数) として作成せよ。サブルーチン (関数) の中では、別に作成したサブルーチン (関数) を参照してもよい。

②適当な行列と、計算された逆行列との積を計算することによって、逆行列の演算が正しく行われたか検算せよ (提出は不要)。

③作成したサブルーチン (関数) を用いて以下の連立一次方程式を解け。

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 1 \\ 3x_1 - 2x_3 + 3x_4 = -2 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -1 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 4 \end{cases}$$

計算に用いたプログラム (`prog02.f` または `prog02.c`) と、逆行列と連立方程式の解を記したテキストファイル (`answer02.txt`) を提出せよ。