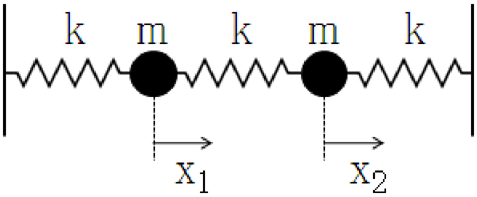
３　固有値・固有ベクトル

固有値、固有ベクトルは線形な系の特性を考えるうえで非常に重要である。また、主成分分析のような統計解析にも用いられる。ここでは計算機を用いて実対称行列の固有値、固有ベクトルを求める方法を学ぶ。

３．１　連成振動

図のようなバネ定数ｋのバネによってつながれた質量ｍのおもりがどのような振動をするか考える。



それぞれのおもりの変位をx_1とx_2すると、運動方程式は次のように書ける。

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -kx_1 - k(x_1 - x_2) \\ m\ddot{x}_2 = -k(x_2 - x_1) - kx_2 \end{cases}$$

簡単のため、質量ｍとバネ定数ｋを１として、

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = -2x_1 + x_2 \\ \ddot{x}_2 = x_1 - 2x_2 \end{cases}$$

とする。ここで、調和振動を仮定して、

$$x_1 = \hat{x}_1 \sin \omega t,\ x_2 = \hat{x}_2 \sin \omega t$$

とおくと、

$$\begin{cases} -\omega^2 \hat{x}_1 = -2\hat{x}_1 + \hat{x}_2 \\ -\omega^2 \hat{x}_2 = \hat{x}_1 - 2\hat{x}_2 \end{cases}$$

と書ける。さらに、この連立方程式をベクトルと行列を用いて、

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix}$$

と書きかえることができる。ただし$\lambda = \omega^2$である。つまり、この連成振動の問題は、行列$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$をかけたときに定数倍になるようなベクトル$\begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix}$と、そのベクトルに対応する定数$\lambda$を求める問題に置きかえられることになる。この方程式の解は、$\lambda = 1$に対して$\begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$、$\lambda = 3$に対して$\begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$である。前者はふたつのおもりが同じ運動をする場合、後者はふたつのおもりが逆の運動をする場合である。このような数学的な問題においてはλを固有値、対応するベクトルを固有ベクトルとよんでいる。以上のように、系の時間変化を決定する方程式系を行列によって記述し、固有値、固有ベクトルを計算すると、系が持っている固有の振動のパターンを調べることができる。このような固有の振動パターンを固有振動とよぶことがある。

以下では、行列の固有値、固有ベクトルの性質や計算方法について考え、系の固有振動を調べるために応用してみる。

３．２　固有値・固有ベクトル

ある正方行列Ａについて、零ベクトルではないベクトル$\vec{x}$が存在して、

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x}$$

を満たすとき、λを行列Ａの**固有値**、$\vec{x}$を**固有ベクトル**という。行列Ａの固有値λは、

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

を満たす。

［証明］

λを行列Ａの**固有値**、$\vec{x}$を**固有ベクトル**とすると、

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x}$$

より、

$$(A - \lambda E)\vec{x} = \vec{0}$$

ここで、Ａ－λＥに逆行列が存在すると仮定する。左から逆行列（Ａ－λＥ）$^{-1}$をかけると、

$$\vec{x} = \vec{0}$$

となり、$\vec{x}$が零ベクトルではないという条件に反し矛盾が生じる。したがって、Ａ－λＥに逆行列は存在しない。ゆえに、

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

である。

逆に、det（Ａ－λＥ）＝０を満たすλは行列Ａの固有値であることが分かっている。

$\det(A - \lambda E) = 0$は、固有値λに関するｎ次方程式になっている。この方程式を**固有方程式**（特性方程式）いう。一般にｎ次方程式の解は重解を含めればｎ個存在するので、ｎ次正方行列Ａの固有値は重複を含めてｎ個存在する。

また、ある正方行列が正則であれば固有値はゼロではない。逆に、ある正方行列の固有値がゼロでなければ正則である。つまり、

正則である　⇔　固有値がゼロではない

問１．以下の行列の固有値、固有ベクトルをすべて求めよ。

（１）$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$　（２）$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

３．３　エルミート行列

正方行列Ａのすべての成分a_{ij}が実数であって、$a_{ij} = a_{ji}$を満たすとき、行列Ａを**実対称行列**という。また、複素数の場合に拡張して、正方行列Ａのすべての成分a_{ij}について、a_{ij}がa_{ji}の複素共役$\tilde{a}_{ji}$と等しい、つまり$a_{ij} = \tilde{a}_{ji}$を満たすとき、行列Ａを**エルミート行列**という。実対称行列とは、転置行列が自分自身に等しい行列のことであり、エルミート行列とは、随伴行列が自分自身と等しい行列のことである。

エルミート行列にはいくつかの重要な性質がある。

エルミート行列の固有値はすべて実数である。

［証明］

正方行列Ａのある固有値をλ、固有ベクトルを$\vec{x}$とすると、

$$\vec{x}^* A\vec{x} = \vec{x}^*(A\vec{x}) = \vec{x}^*(\lambda\vec{x}) = \lambda\vec{x}^*\vec{x}$$

が成り立つ。一方、Ａ*＝Ａだから、

$$\vec{x}^* A\vec{x} = \vec{x}^* A^*\vec{x} = (\vec{x}^* A^*)\vec{x} = (A\vec{x})^*\vec{x} = \tilde{\lambda}\vec{x}^*\vec{x}$$

ふたつの式を比べると、

$$\tilde{\lambda} = \lambda$$

　となるから、λは実数である。

また、

エルミート行列の異なる固有値に対応する固有ベクトルは互いに直交する。

［証明］

　正方行列Ａのふたつの異なる固有値をλ_1、λ_2、それぞれの固有値に対応する固有ベクトルを$\vec{x}_1$、$\vec{x}_2$とすると、

$$\vec{x}_2^{\,*}A\vec{x}_1 = \vec{x}_2^{\,*}(A\vec{x}_1) = \vec{x}_2^{\,*}(\lambda_1\vec{x}) = \lambda_1\vec{x}_2^{\,*}\vec{x}_1$$

　が成り立つ。一方、$A^* = A$だから、

$$\vec{x}_2^{\,*}A\vec{x}_1 = \vec{x}_2^{\,*}A^*\vec{x}_1 = (A\vec{x}_2)^*\vec{x}_1 = (\lambda_2\vec{x}_2)^*\vec{x}_1 = \lambda_2\vec{x}_2^{\,*}\vec{x}_1$$

　ふたつの式を比べると、

$$\lambda_1\vec{x}_2^{\,*}\vec{x}_1 = \lambda_2\vec{x}_2^{\,*}\vec{x}_1$$

　となるから、$\lambda_1 \neq \lambda_2$であれば、

$$\vec{x}_2^{\,*}\vec{x}_1 = 0$$

　したがって、異なる固有値に対応する固有ベクトルは直交する。

３．４　べき乗法による固有値・固有ベクトルの計算

　実対称行列Ａの固有値、固有ベクトルのうち、絶対値が最大の固有値と、その固有値に対応する固有ベクトルは比較的容易に計算できる。たとえば、

$$A = \begin{pmatrix} 1.8 & 0.4 \\ 0.4 & 1.2 \end{pmatrix}$$

の固有値、固有ベクトルは、

$$\lambda_1 = 2,\ \overrightarrow{x_1} = \begin{pmatrix} 0.894 \\ 0.447 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_2 = 1,\ \overrightarrow{x_2} = \begin{pmatrix} -0.447 \\ 0.894 \end{pmatrix}$$

である。ここで、適当なベクトル$\overrightarrow{y_0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$に行列Ａかけて、$\overrightarrow{y_1}$を得るものとする。

$$\overrightarrow{y_1} = \begin{pmatrix} 1.8 & 0.4 \\ 0.4 & 1.2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.8 \\ 0.4 \end{pmatrix}$$

を得る。もう一度行列Ａをかけて、

$$\overrightarrow{y_2} = \begin{pmatrix} 1.8 & 0.4 \\ 0.4 & 1.2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1.8 \\ 0.4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.4 \\ 1.2 \end{pmatrix}$$

を得る。同様にして、ベクトル$\overrightarrow{y_n}$を計算していくと、

$$\overrightarrow{y_3} = \begin{pmatrix} 6.6 \\ 2.8 \end{pmatrix},\ \overrightarrow{y_4} = \begin{pmatrix} 13.0 \\ 6.0 \end{pmatrix},\ \overrightarrow{y_5} = \begin{pmatrix} 25.8 \\ 12.4 \end{pmatrix}, \ldots$$

となる。この例では、ベクトルに行列Ａを何回もかけることによって、$\overrightarrow{x_1} = \begin{pmatrix} 0.894 \\ 0.447 \end{pmatrix}$の定数倍に収束していく。適当なベクトルに実対称行列を多数回かけると、絶対値が最大の固有値に対応する固有ベクトルに収束するようである。以下では、実対称行列のこのような性質を検討し、実対称行列Ａの固有値、固有ベクトルのうち、絶対値が最大の固有値と、その固有値に対応する固有ベクトルを求める方法を考える。

　ｎ次の実対称行列の固有値はｎ個存在するので、対応する固有ベクトルもｎ個存在する。実対称行列の固有ベクトルは互いに直交するので一次独立である。したがって、任意のｎ

次元ベクトルは、n 個の固有ベクトルの線形結合で表わすことができる。ここで、零ベクトルではない、ある n 次元ベクトルを$\vec{y}$、n 次実対称行列Ａの固有値を絶対値の大きいほうから順にλ_1、λ_2、…、λ_n、対応する固有ベクトルを$\vec{x}_1$、$\vec{x}_2$、…、$\vec{x}_n$とすると、

$$\vec{y} = c_1\vec{x}_1 + c_2\vec{x}_2 + \cdots + c_n\vec{x}_n$$

と書ける。ここで、c_iは実数である。ただし、各固有ベクトルは絶対値が１になるように規格化されているものとする。$\vec{y}$に左から行列Ａを k 回かけると、

$$A^k\vec{y} = c_1A^k\vec{x}_1 + c_2A^k\vec{x}_2 + \cdots + c_nA^k\vec{x}_n = c_1{\lambda_1}^k\vec{x}_1 + c_2{\lambda_2}^k\vec{x}_2 + \cdots + c_n{\lambda_n}^k\vec{x}_n$$

となる。ここで、 $i \geqq 2$に対して、$|\lambda_1| > |\lambda_i|$だから、

$$\lim_{k\to\infty}\frac{|{\lambda_i}^k|}{|{\lambda_1}^k|} \to 0$$

ゆえに、

$$\lim_{k\to\infty}\frac{|c_i{\lambda_i}^k\vec{x}_i|}{|c_1{\lambda_1}^k\vec{x}_1|} = \lim_{k\to\infty}\frac{|c_i{\lambda_i}^k|}{|c_1{\lambda_1}^k|} = \frac{|c_i|}{|c_1|}\lim_{k\to\infty}\frac{|{\lambda_i}^k|}{|{\lambda_1}^k|} \to 0$$

したがって、$k\to\infty$のとき、

$$\frac{A^k\vec{y}}{|A^k\vec{y}|} = \frac{c_1{\lambda_1}^k\vec{x}_1 + c_2{\lambda_2}^k\vec{x}_2 + \cdots + c_n{\lambda_n}^k\vec{x}_n}{|c_1{\lambda_1}^k\vec{x}_1 + c_2{\lambda_2}^k\vec{x}_2 + \cdots + c_n{\lambda_n}^k\vec{x}_n|} \to \frac{c_1{\lambda_1}^k\vec{x}_1}{|c_1{\lambda_1}^k\vec{x}_1|}$$

つまり、適当なベクトル$\vec{y}$に対して行列Ａを多数回かければ、絶対値が最大である固有値に対応する固有ベクトルに収束する。実際に計算するときには、$|\lambda_1| > 1$であれば$k\to\infty$で$|A^k\vec{y}| \to \infty$、$|\lambda_1| < 1$であれば$|A^k\vec{y}| \to 0$となるので、行列Ａをかけるごとにベクトル$\vec{y}$を規格化するとよい。このようにして実対称行列の絶対値が最大の固有値と、対応する固有ベクトルを求める方法を**べき乗法**という。

行列Ａの固有値がλ_1、λ_2、…、λ_nであるとき、逆行列A^{-1}の固有値は${\lambda_1}^{-1}$、${\lambda_2}^{-1}$、…、${\lambda_n}^{-1}$である。したがって、絶対値が最小である固有値を求めるときは、逆行列について絶対値が最大である固有値を求めればよい。

課題３－１：①任意の実対称行列に対して、べき乗法を用いて絶対値が最大である固有値と対応する固有ベクトルを計算するプログラムを作成せよ。固有値、固有ベクトルを計算するプログラムは POWMAX という名前のサブルーチン（C の場合は powmax という名前の関数）として作成せよ。サブルーチン（関数）の中では、別に作成したサブルーチン（関数）を参照してもよい。

②任意の正則な実対称行列に対して、逆行列を計算し、さらにべき乗法を適用することによって、絶対値が最小である固有値と対応する固有ベクトルを計算するプログラムを作成せよ。固有値、固有ベクトルを計算するプログラムは POWMIN という名前のサブルーチン（C の場合は powmin という名前の関数）として作成せよ。サブルーチン（関数）の中では、別に作成したサブルーチン（関数）を参照してもよい。これまでに作成したサブルーチン（関数）も活用してよい。

③作成したプログラムを用いて、以下の行列の絶対値が最大の固有値と対応する固有ベクトル、および絶対値が最小の固有値と対応する固有ベクトルを求めよ。

$$\begin{pmatrix} 0.9 & 0.4 & 0.1 & -0.3 & -0.1 & 0.2 \\ 0.4 & 0.8 & 0.5 & 0.0 & -0.2 & -0.1 \\ 0.1 & 0.5 & 0.8 & 0.4 & -0.1 & -0.2 \\ -0.3 & 0.0 & 0.4 & 0.7 & 0.3 & -0.1 \\ -0.1 & -0.2 & -0.1 & 0.3 & 0.8 & 0.4 \\ 0.2 & -0.1 & -0.2 & -0.1 & 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$$

計算に用いたプログラム（①で作成したサブルーチンまたは関数を使って③を解いたもの（prog03_1_1.f または prog03_1_1.c）と②で作成したサブルーチンまたは関数を使って③を解いたもの（prog03_1_2.f または prog03_1_2.c））と、③で得られた固有値、固有ベクトルを記したテキストファイル（answer03_1.txt）を提出せよ。

３．５　グラム・シュミットの直交化

ｎ次元の空間において、たがいに直交し大きさが１であるｎ個のベクトルの組を**正規直交基底**という。たとえば、実対称行列の固有ベクトルはたがいに直交するから、実対称行列Ａの規格化された固有ベクトルの組$\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n\}$は正規直交基底である。ここでは、正則な正方行列Ａ＝$(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n)$から、正規直交基底$\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n\}$を求めることを考えてみる。

$$\vec{x}_1 = \frac{\vec{a}_1}{|\vec{a}_1|}$$

$$\vec{x}_2 = \frac{\vec{a}_2 - (\vec{a}_2 \cdot \vec{x}_1)\vec{x}_1}{|\vec{a}_2 - (\vec{a}_2 \cdot \vec{x}_1)\vec{x}_1|}$$

$$\vec{x}_3 = \frac{\vec{a}_3 - (\vec{a}_3 \cdot \vec{x}_1)\vec{x}_1 - (\vec{a}_3 \cdot \vec{x}_2)\vec{x}_2}{|\vec{a}_3 - (\vec{a}_3 \cdot \vec{x}_1)\vec{x}_1 - (\vec{a}_3 \cdot \vec{x}_2)\vec{x}_2|}$$

$$\dots$$

$$\vec{x}_n = \frac{\vec{a}_n - (\vec{a}_n \cdot \vec{x}_1)\vec{x}_1 - (\vec{a}_n \cdot \vec{x}_2)\vec{x}_2 - \dots - (\vec{a}_n \cdot \vec{x}_{n-1})\vec{x}_{n-1}}{|\vec{a}_n - (\vec{a}_n \cdot \vec{x}_1)\vec{x}_1 - (\vec{a}_n \cdot \vec{x}_2)\vec{x}_2 - \dots - (\vec{a}_n \cdot \vec{x}_{n-1})\vec{x}_{n-1}|}$$

このようにして得られたベクトルの組$\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n\}$は正規直交基底である。つまり、行列Ｑ＝$(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$は直交行列になっている。このようにして正則な正方行列から直交行列を求める方法を**グラム・シュミットの直交化**（シュミットの直交化）という。

問２．以下の行列に対して、グラム・シュミットの直交化を行え。

（１）$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$　（２）$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

３．６　ＱＲ分解

正則な正方行列Ａについて、グラム・シュミットの直交化によって直交行列Ｑ＝$(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$を求める。このとき、

Ａ＝ＱＲ

と書くことができる。ここで、行列Ｒは対角成分よりも左下にある成分はすべてゼロである。このような行列を**上三角行列**という。このように、正則な正方行列を直交行列と上三角行列の積に分解することを**ＱＲ分解**という。任意の正則な正方行列は、符号を除いて一意にＱＲ分解できる。

問３．問２の行列（１）、（２）に対して、ＱＲ分解を行え。

３．７　ＱＲ法による固有値・固有ベクトルの計算

べき乗法では、適当なベクトル$\vec{y}_1$に対して、実対称行列Ａをかけるという操作を多数回反復することによって絶対値が最大の固有値に対応する固有ベクトル$\vec{x}_1$に収束させた。実対称行列の固有ベクトルはたがいに直交する。したがって、適当なベクトル$\vec{y}_2$に対して、行列Ａをかけてベクトル$\vec{y}_1$と平行な成分を取り除くという操作を反復すると、絶対値が２番目に大きい固有値に対応する固有ベクトル$\vec{x}_2$に収束すると期待される。一般に、適当なベクトル$\vec{y}_i$に対して、行列Ａをかけてベクトル$\vec{y}_1$、…、$\vec{y}_{i-1}$と平行な成分を取り除くという操作を反復すると、絶対値がｉ番目に大きい固有値に対応する固有ベクトル$\vec{x}_i$に収束する。初期のベクトルの組$\{\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_n\}$を$(\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_n)$＝Ｅ（Ｅは単位行列）としたとき、以上の操作を次のように書くことができる。

$$A = AE = P_1 R_1$$
$$AP_1 = P_2 R_2$$
$$AP_2 = P_3 R_3$$
$$AP_3 = P_4 R_4$$
$$\cdots$$

ただし、P_kは直交行列、R_kは上三角行列である。$k\to\infty$のとき、$\vec{y}_i \to \vec{x}_i$だから、$P_k \to (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$である。これらの式は左から$P_k{}^{-1}$をかけることによって、次のように変形できる。

$$A = AE = P_1 R_1$$
$$P_1{}^{-1} A P_1 = P_1{}^{-1} P_2 R_2$$
$$P_2{}^{-1} A P_2 = P_2{}^{-1} P_3 R_3$$
$$P_3{}^{-1} A P_3 = P_3{}^{-1} P_4 R_4$$
$$\cdots$$

ここで、

$$Q_1 = P_1$$
$$Q_2 = P_1{}^{-1} P_2$$
$$Q_3 = P_2{}^{-1} P_3$$
$$Q_4 = P_3{}^{-1} P_4$$
$$\cdots$$

と定義すると、Q_kは直交行列であって、

$$A = Q_1 R_1$$
$$Q_1{}^{-1} A Q_1 = Q_2 R_2$$
$$Q_2{}^{-1} Q_1{}^{-1} A Q_1 Q_2 = Q_3 R_3$$
$$Q_3{}^{-1} Q_2{}^{-1} Q_1{}^{-1} A Q_1 Q_2 Q_3 = Q_4 R_4$$
$$\cdots$$

となる。一般に、

$$Q_{k-1}{}^{-1} \cdots Q_2{}^{-1} Q_1{}^{-1} A Q_1 Q_2 \cdots Q_{k-1} = Q_k R_k$$

の両辺に左側から$Q_k{}^{-1}$、右側からQ_kをかけると、

$$Q_k{}^{-1} \cdots Q_2{}^{-1} Q_1{}^{-1} A Q_1 Q_2 \cdots Q_k = R_k Q_k$$

上の式に代入すると、

$$A = Q_1 R_1$$
$$R_1 Q_1 = Q_2 R_2$$
$$R_2 Q_2 = Q_3 R_3$$
$$R_3 Q_3 = Q_4 R_4$$
$$\cdots$$

となる。したがって、次のような手順によって、実対称行列Ａの固有値、固有ベクトルを求めることができる。

（１）行列ＡをＱＲ分解し、
得られた行列Q_1、R_1についてR_1Q_1を計算して行列A_1とする。

（２）行列A_1をＱＲ分解し、
得られた行列Q_2、R_2についてR_2Q_2を計算して行列A_2とする。

一般に、

（ｋ）行列A_{k-1}をＱＲ分解し、
得られた行列Q_k、R_kについてR_kQ_kを計算して行列A_kとする。

このようにＱＲ分解を反復することによって、$Q_1Q_2Q_3\cdots Q_k$は行列Ａの固有ベクトルの組$\{\vec{x}_1,\vec{x}_2,\dots,\vec{x}_n\}$からなる行列$(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\dots,\vec{x}_n)$に収束する。また、このとき、$R_k$は対角行列に収束し、対角成分は行列Ａの固有値の絶対値に収束する。このようにして実対称行列の固有値、固有ベクトルを求める方法を**ＱＲ法**という。

課題３－２：①任意の正則な正方行列に対してグラム・シュミットの直交化を行うプログラムを作成せよ。

②次に、そのプログラムを拡張して、任意の正則な正方行列に対してＱＲ分解を行うプログラムを作成せよ。ＱＲ分解を行うプログラムは QRDEV という名前のサブルーチン（C の場合は qrdev という名前の関数）として作ること。サブルーチン（関数）の中では、別に作成したサブルーチン（関数）を参照してもよい。

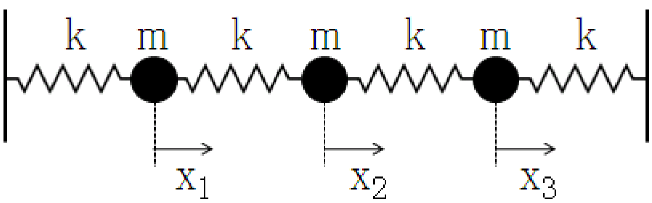
③さらに、②で作成したサブルーチン（関数）を用いて、任意の正則な実対称行列について、ＱＲ法を用いて固有値、固有ベクトルを計算するプログラムを作成せよ。固有値、固有ベクトルを計算するプログラムは EIGEN という名前のサブルーチン（C の場合は eigen という名前の関数）として作ること。また検算を適宜行うこと。

④作成したサブルーチン（関数）を用いて、以下の行列の固有値、固有ベクトルをすべて求めよ。

$$\begin{pmatrix} 0.9 & 0.4 & 0.1 & -0.3 & -0.1 & 0.2 \\ 0.4 & 0.8 & 0.5 & 0.0 & -0.2 & -0.1 \\ 0.1 & 0.5 & 0.8 & 0.4 & -0.1 & -0.2 \\ -0.3 & 0.0 & 0.4 & 0.7 & 0.3 & -0.1 \\ -0.1 & -0.2 & -0.1 & 0.3 & 0.8 & 0.4 \\ 0.2 & -0.1 & -0.2 & -0.1 & 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$$

計算に用いたプログラム（prog03_2.f または prog03_2.c）と、固有値、固有ベクトルを記したテキストファイル（answer03_2.txt）を提出せよ。

課題３－３：図のようなバネ定数ｋのバネによってつながれた質量ｍのおもり３個について、運動方程式を書け。つぎに、課題３－２で作成したプログラムを用いて固有振動（周期とパターン）をすべて求めよ。簡単のためｋ＝１、ｍ＝１としてよい。



結果を簡単なレポートとしてまとめ、PDF ファイル（report03_3.pdf）で提出せよ。