２　荷電粒子の運動

電磁場中の荷電粒子は、ローレンツ力を受ける。そこで、一様な電磁場中での荷電粒子の運動に関する運動方程式を導出し、数値シミュレーションによって粒子の運動を計算してみる。

２．１　荷電粒子の運動方程式

一般に荷電粒子は電磁場から力を受ける。質量mの粒子に作用する力を$\vec{F}$とすると運動方程式は、

$$m\frac{d^2}{dt^2}\vec{x} = \vec{F}$$

と書ける。ただし、$\vec{x} = (x, y, z)$は物体の位置ベクトルである。電磁場中の荷電粒子を考えると、力$\vec{F}$は、

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \frac{d}{dt}\vec{x} \times \vec{B}\right)$$

である。ただし、ｑは荷電粒子が持つ電荷であり、$\vec{E}$は電場、$\vec{B}$は磁場（磁束密度）である。この$\vec{F}$は**ローレンツ力**とよばれる。このとき、荷電粒子の運動方程式は、

$$m\frac{d^2}{dt^2}\vec{x} = q\left(\vec{E} + \frac{d}{dt}\vec{x} \times \vec{B}\right)$$

と書ける。

問１．次のような静電場または静磁場において、正電荷をもつ荷電粒子（質量m、電荷ｑ）の運動を求めよ。まず、時刻ｔにおける速度ｕ、ｖ、ｗをｔの関数として表せ。次に、時刻ｔにおける位置ｘ、ｙ、ｚをｔの関数として求め、概形を図示せよ。

（１）電場は$\vec{E} = (0, E, 0)$（Ｅ＞０）で、磁場はない。初期条件はｔ＝０で$\frac{d}{dt}\vec{x} = (u_0, 0,0)$（$u_0$＞０）、$\vec{x} = (0,0,0)$。

（２）磁場（磁束密度）は$\vec{B} = (0,0, B)$（Ｂ＞０）で、電場はない。初期条件はｔ＝０で$\frac{d}{dt}\vec{x} = (0, v_0, 0)$（$v_0$＞０）、$\vec{x} = (0,0,0)$。

２．２　一様な電磁場中での荷電粒子の運動

ここでは、時間変化をしない、空間的に一様な電磁場中での荷電粒子の運動を考えてみる。電場を$\vec{E} = (0, E, 0)$、磁場（磁束密度）を$\vec{B} = (0,0, B)$（Ｂ≠０）とする。荷電粒子の運動方程式のｘ成分とｙ成分は、

$$m\frac{d}{dt}u = qvB \tag{1}$$

$$m\frac{d}{dt}v = q(E - uB) \tag{2}$$

と書ける。ここで、$\frac{d}{dt}\vec{x} = (u, v, w)$である。ただし、初期条件は$t = 0$で静止、つまり、

$$u = 0, \qquad v = 0$$

とする。これらの方程式の解を解析的に求めてみる。式（２）を時間で微分すると、

$$m\frac{d^2}{dt^2}v = -qB\frac{d}{dt}u$$

となり、これを式（１）に代入して、

$$m^2\frac{d^2}{dt^2}v = -q^2B^2v$$

が得られる。この方程式の解のうち、ｖについての初期条件$t = 0$で$v = 0$をみたすものは、

$$v = C\sin\left(\frac{qB}{m}t\right)$$

である。ただし、Ｃは定数である。この解を（２）に代入すると、

$$qBC\cos\left(\frac{qB}{m}t\right) = q(E - uB)$$

となり、

$$u = \frac{E}{B} - C\cos\left(\frac{qB}{m}t\right)$$

が得られる。ここで、ｕについての初期条件$t = 0$で$u = 0$より、

$$C = \frac{E}{B}$$

である。したがって、

$$u = \frac{E}{B}\left\{1 - \cos\left(\frac{qB}{m}t\right)\right\}$$

$$v = \frac{E}{B}\sin\left(\frac{qB}{m}t\right)$$

問２． Ｅ＞０、Ｂ＞０という条件のもとで、上で求めた荷電粒子の軌跡を図示せよ。ただし、$t = 0$で$\vec{x} = (0,0,0)$とする。なお、このような図形をサイクロイドという。

問３． 上で求めた荷電粒子について、Ｅ＞０、Ｂ＞０という条件のもとで、じゅうぶんに長い時間で平均した粒子の速度を求めよ。

２．３　運動方程式の差分化

式（１）、（２）の解を数値シミュレーションによって求めることを考える。式（１）、（２）が表す時間微分を時間差分（リープフロッグ法）で表現すると、

$$u^+ = u^- + 2\frac{qB}{m}v^0\Delta t \tag{3}$$

$$v^+ = v^- + 2\frac{q}{m}(E - Bu^0)\Delta t \tag{4}$$

と書ける。ただし、Δｔは差分の時間間隔、f^-、f^0、f^+はそれぞれ物理量ｆの時刻ｔ－Δｔ、ｔ、ｔ＋Δｔにおける値である。また、

$$\frac{d}{dt}x = u$$

$$\frac{d}{dt}y = v$$

より、

$$x^+ = x^- + 2u^0\Delta t \tag{5}$$

$$y^+ = y^- + 2v^0\Delta t \tag{6}$$

となる。式（３）～（６）を用いると、初期時刻におけるｕ、ｖ、ｘ、ｙの値から、これらの変数の時間変化を計算することができる。

課題５：時間変化をしない、空間的に一様な電磁場を考え、電場を$\vec{E} = (0, E, 0)$、磁場（磁束密度）を$\vec{B} = (0,0,B)$とする。このような電磁場において、荷電粒子（質量ｍ、電荷ｑ）の、時刻ｔにおける位置を数値積分によって計算するプログラムを作成せよ（prog05.f または prog05.c）。時間差分にはリープフロッグ法を用いよ。簡単のため、質量、電荷、電場、磁束密度を規格化し、ｍ＝１、ｑ＝１、Ｅ＝１、Ｂ＝１とする。ｚ軸方向の運動はないものとし、ｘ－ｙ平面内の運動のみを計算すればよい。初期の位置は原点とする。初速度（u_0，v_0）は標準入力から与えるものとする。数値積分の時間間隔にはじゅうぶんに小さい値を設定し、各時刻のｘ座標、ｙ座標の値をテキストファイルに書き出すようにせよ。また、初速度を$u_0 = v_0 = 0$としたときの結果を gnuplot で作図せよ（fig05.ps）。