

5 荷電粒子の運動

電磁場中の荷電粒子は、ローレンツ力を受ける。そこで、一様な電磁場中での荷電粒子の運動に関する運動方程式を導出し、数値シミュレーションによって粒子の運動を計算してみる。

5. 1 荷電粒子の運動方程式

一般に荷電粒子は電磁場から力を受ける。質量 m の粒子に作用する力を \vec{F} とすると運動方程式は、

$$m \frac{d^2}{dt^2} \vec{x} = \vec{F}$$

と書ける。ただし、 $\vec{x} = (x, y, z)$ は物体の位置ベクトルである。電磁場中の荷電粒子を考えると、力 \vec{F} は、

$$\vec{F} = q \left(\vec{E} + \frac{d}{dt} \vec{x} \times \vec{B} \right)$$

である。ただし、 q は荷電粒子が持つ電荷であり、 \vec{E} は電場、 \vec{B} は磁場（磁束密度）である。この \vec{F} は**ローレンツ力**とよばれる。このとき、荷電粒子の運動方程式は、

$$m \frac{d^2}{dt^2} \vec{x} = q \left(\vec{E} + \frac{d}{dt} \vec{x} \times \vec{B} \right)$$

と書ける。

問1. 次のような静電場または静磁場において、正電荷をもつ荷電粒子（質量 m 、電荷 q ）の運動を求めよ。まず、時刻 t における速度 u 、 v 、 w を t の関数として表せ。次に、時刻 t における位置 x 、 y 、 z を t の関数として求め、概形を図示せよ。

(1) 電場は $\vec{E} = (0, E, 0)$ ($E > 0$) で、磁場はない。初期条件は $t = 0$ で $\frac{d}{dt} \vec{x} = (u_0, 0, 0)$ ($u_0 > 0$)、 $\vec{x} = (0, 0, 0)$ 。

(2) 磁場（磁束密度）は $\vec{B} = (0, 0, B)$ ($B > 0$) で、電場はない。初期条件は $t = 0$ で $\frac{d}{dt} \vec{x} = (0, v_0, 0)$ ($v_0 > 0$)、 $\vec{x} = (0, 0, 0)$ 。

5. 2 一様な電磁場中での荷電粒子の運動

ここでは、時間変化をしない、空間的に一様な電磁場中での荷電粒子の運動を考えてみる。電場を $\vec{E} = (0, E, 0)$ 、磁場（磁束密度）を $\vec{B} = (0, 0, B)$ ($B \neq 0$) とする。荷電粒子の運動方程式の x 成分と y 成分は、

$$m \frac{d}{dt} u = qvB \tag{1}$$

$$m \frac{d}{dt} \mathbf{v} = q(\mathbf{E} - \mathbf{u}B) \quad (2)$$

と書ける。ここで、 $\frac{d}{dt} \mathbf{x} = (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ である。ただし、初期条件は $t = 0$ で静止、つまり、

$$\mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{v} = 0$$

とする。これらの方程式の解を解析的に求めてみる。式(2)を時間で微分すると、

$$m \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{v} = -qB \frac{d}{dt} \mathbf{u}$$

となり、これを式(1)に代入して、

$$m^2 \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{v} = -q^2 B^2 \mathbf{v}$$

が得られる。この方程式の解のうち、 \mathbf{v} についての初期条件 $t = 0$ で $\mathbf{v} = 0$ をみたすものは、

$$\mathbf{v} = C \sin\left(\frac{qB}{m} t\right)$$

である。ただし、 C は定数である。この解を(2)に代入すると、

$$qBC \cos\left(\frac{qB}{m} t\right) = q(\mathbf{E} - \mathbf{u}B)$$

となり、

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{E}}{B} - C \cos\left(\frac{qB}{m} t\right)$$

が得られる。ここで、 \mathbf{u} についての初期条件 $t = 0$ で $\mathbf{u} = 0$ より、

$$C = \frac{\mathbf{E}}{B}$$

である。したがって、

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \frac{\mathbf{E}}{B} \left\{ 1 - \cos\left(\frac{qB}{m} t\right) \right\} \\ \mathbf{v} &= \frac{\mathbf{E}}{B} \sin\left(\frac{qB}{m} t\right) \end{aligned}$$

問2. $E > 0$ 、 $B > 0$ という条件のもとで、上で求めた荷電粒子の軌跡を図示せよ。ただし、 $t = 0$ で $\mathbf{x} = (0,0,0)$ とする。なお、このような図形をサイクロイドという。

問3. 上で求めた荷電粒子について、 $E > 0$ 、 $B > 0$ という条件のもとで、じゅうぶんに長い時間で平均した粒子の速度を求めよ。

5. 3 運動方程式の差分化

式(1)、(2)の解を数値シミュレーションによって求めることを考える。式(1)、(2)が表す時間微分を時間差分(リーブフロッグ法)で表現すると、

$$u^+ = u^- + 2 \frac{qB}{m} v^0 \Delta t \quad (3)$$

$$v^+ = v^- + 2 \frac{q}{m} (E - Bu^0) \Delta t \quad (4)$$

と書ける。ただし、 Δt は差分の時間間隔、 f^- 、 f^0 、 f^+ はそれぞれ物理量 f の時刻 $t - \Delta t$ 、 t 、 $t + \Delta t$ における値である。また、

$$\frac{d}{dt} x = u$$

$$\frac{d}{dt} y = v$$

より、

$$x^+ = x^- + 2u^0 \Delta t \quad (5)$$

$$y^+ = y^- + 2v^0 \Delta t \quad (6)$$

となる。式 (3) ~ (6) を用いると、初期時刻における u 、 v 、 x 、 y の値から、これらの変数の時間変化を計算することができる。

課題 5 : 時間変化をしない、空間的に一様な電磁場を考え、電場を $\vec{E} = (0, E, 0)$ 、磁場 (磁束密度) を $\vec{B} = (0, 0, B)$ とする。このような電磁場において、荷電粒子 (質量 m 、電荷 q) の、時刻 t における位置を数値積分によって計算するプログラムを作成せよ (prog05.f または prog05.c)。時間差分にはリープフロッグ法を用いよ。簡単のため、質量、電荷、電場、磁束密度を規格化し、 $m = 1$ 、 $q = 1$ 、 $E = 1$ 、 $B = 1$ とする。 z 軸方向の運動はないものとし、 $x - y$ 平面内の運動のみを計算すればよい。初期の位置は原点とする。初速度 (u_0 、 v_0) は標準入力から与えるものとする。数値積分の時間間隔にはじゅうぶんに小さい値を設定し、各時刻の x 座標、 y 座標の値をテキストファイルに書き出すようにせよ。また、初速度を $u_0 = v_0 = 0$ としたときの結果を **gnuplot** で作図せよ (fig05.ps)。