２　逆行列

逆行列の計算は、連立一次方程式を数値的に解くために利用される。気象学の分野では線形系の応答問題を数値的に解くときに用いられることも多い。ここでは計算機を用いて逆行列を求める方法を学ぶ。

２．１　はじめに

たとえば、次のような連立一次方程式を解くことを考える。

$$\begin{cases} 7x + 5y = 9 \\ 3x + 2y = 4 \end{cases}$$

このような２元連立一次方程式は、代入法や消去法によって容易に解くことができる。解法をプログラミング言語によって記述することも困難ではない。では、次のような多元連立一次方程式はどうであろうか。

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 1 \\ 3x_1 - 2x_3 + 3x_4 = -2 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -1 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 4 \end{cases}$$

原理的には、未知数と方程式の数が増えても、２元連立一次方程式の場合と同様に代入法や消去法によって解くことができるはずである。しかし現実には、計算の手順は煩雑となり、プログラミング言語によって記述することも容易ではなくなる。ｎ元連立一次方程式の解法を一般的に記述する方法はないだろうか。実は、このようなときには、連立一次方程式を行列によって記述すると便利である。すなわち、上の連立方程式は、

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

と書きかえることが可能である。もし、左辺の行列の逆行列を求めることができれば、この連立一次方程式の解は、

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

として計算することができる。以下では、このようなｎ次正方行列の逆行列を一般的に計算する方法を考えてみる。

２．２　正則行列と逆行列

ある正方行列Ａについて、

ＡＸ＝ＸＡ＝Ｅ　　（ＥはＡと同じ型の単位行列）

となる正方行列Ｘが存在するとき、ＸをＡの**逆行列**(inverse matrix)といい、A^{-1}で表す。なお、あとで述べるように、ＡＸ＝ＥとＸＡ＝Ｅのうち、どちらか一方が成り立てば他方も成り立つ。

例１：

$$A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}\text{に対して、}A^{-1}=\begin{pmatrix}2 & -3\\ -1 & 2\end{pmatrix}$$

例２：

$$A=\begin{pmatrix}2 & 6 & 9\\ 1 & 4 & 6\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}\text{に対して、}A^{-1}=\begin{pmatrix}2 & -3 & 0\\ -2 & 4 & -3\\ 1 & -2 & 2\end{pmatrix}$$

逆行列は常に存在するとは限らない。逆行列が存在する行列を**正則行列**(regular matrix)という。

正則である　⇔　逆行列が存在する

一般に、正則行列Ａの逆行列Ａ$^{-1}$も正則であり、

$$(A^{-1})^{-1}=A$$

が成り立つ。また、２つの正則行列Ａ、Ｂの積ＡＢは正則であり、逆行列は、

$$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$$

である。

また、一般に、ＡＸ＝Ｅが成り立てば、ＸＡ＝Ｅも成り立つことがわかっている[1]。

２次の正方行列$A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$　に対して、⊿＝ad－bc とおくと、

⊿≠０ならば、Ａは正則であり、$A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}$

⊿＝０ならば、Ａは正則ではない。

問１．以下の行列の逆行列を求めよ。

（１）$\begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & 3\end{pmatrix}$　（２）$\begin{pmatrix}3 & 1\\ 7 & 2\end{pmatrix}$　（３）$\begin{pmatrix}-4 & 2\\ -5 & 3\end{pmatrix}$

２．３　連立一次方程式と逆行列

逆行列を使って連立一次方程式を解くことを考える。たとえば、

$$\begin{cases}2x+6y+9z=3\\ x+4y+6z=1\\ y+2z=-2\end{cases}$$

に関して、

$$A=\begin{pmatrix}2 & 6 & 9\\ 1 & 4 & 6\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix},\ \vec{b}=\begin{pmatrix}3\\ 1\\ -2\end{pmatrix},\ \vec{x}=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$$

とおくと、この連立一次方程式を

$$A\vec{x}=\vec{b}$$

と表現することができる。ここで行列Ａが正則であれは、

$$\vec{x}=A^{-1}\vec{b}$$

となり、逆行列A^{-1}とベクトル$\vec{b}$の積を計算することによってベクトル$\vec{x}$を求めることができる。上の例では、行列Aは実際に正則であって、

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}2&-3&0\\-2&4&-3\\1&-2&2\end{pmatrix}$$

だから、

$$\vec{x}=\begin{pmatrix}2&-3&0\\-2&4&-3\\1&-2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\1\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\4\\-3\end{pmatrix}$$

となって、

$$\begin{cases}x=3\\y=4\\z=-3\end{cases}$$

であることがわかる。

問２．以下の連立１次方程式を、逆行列を用いて解け。ただし、（３）では上の結果を用いてよい。

（１）$\begin{cases}7x+5y=9\\3x+2y=4\end{cases}$　（２）$\begin{cases}5x-3y=14\\2x+y=-1\end{cases}$　（３）$\begin{cases}2x+6y+9z=2\\x+4y+6z=5\\y+2z=-1\end{cases}$

２．４　基本変形と階数

正方行列Aに対して行列Xで表現されるような変換を行なって単位行列に変換できたとする。このとき、XA＝Eだから、行列Aの逆行列はA^{-1}＝Xである。つまり、行列Aを単位行列に変換する操作を行なえば、行列Aの逆行列を求めることができる。

正方行列Aに対して行なわれる、以下のような操作を**左基本変形**（行基本変形）(elementary row operation)という。

１．二つの行を入れ替える。
２．ある行に０でない数をかける。
３．ある行に他のある行の定数倍を加える。

これらの操作は、行列Aに対して左からある正方行列Pをかける演算として表現できる。このとき行列Pを**基本行列**(elementary matrix)という。

例１：２行目と３行目を入れ替える。

$$P=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

例２：２行目に３をかける。

$$P=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&3&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

例３：３行目に２行目の４倍を加える。

$$P=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&4&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

同様に、以下のような操作を**右基本変形**（列基本変形）(elementary column operation)という。

１．二つの列を入れ替える。
２．ある列に０でない数をかける。
３．ある列に他のある列の定数倍を加える。

これらの操作は、行列Ａに対して右からある正方行列Ｑをかける演算として表現できる。行列Ｑも基本行列とよばれる。一般に基本行列は正則である。

任意のｎ次正方行列は、基本変形を何回か行なうことによって、以下のような標準形に変形することができる。

$$P_k\cdots P_2P_1AQ_1Q_2\cdots Q_\ell=\begin{pmatrix}1&&&&&\\&\ddots^{r}&&&&\\&&1&&&\\&&&0&&\\&&&&\ddots^{n-r}&\\&&&&&0\end{pmatrix}\qquad(1)$$

このときｒを行列の**階数**(rank)という。一般に、行列の階数は一意に定まることがわかっている[2]。階数が次数に等しければ、右辺は単位行列である。実は、階数が次数に等しい場合には、左基本変形か右基本変形のどちらか一方のみによって行列Ａを単位行列に変形できる[3]。つまり、

$$P_m\cdots P_2P_1A=E$$

のように書くことができる。このとき、逆行列$A^{-1}=P_m\cdots P_2P_1$が存在するから、行列Ａは正則である。逆に、一般に基本行列Ｐ、Ｑは正則だから、行列Ａが正則であれば、式（１）において、$P_k\cdots P_2P_1AQ_1Q_2\cdots Q_\ell$も正則である。右辺が正則であるためには単位行列でなければならないから、階数は次数に等しい。つまり、

正則である　⇔　逆行列が存在する　⇔　階数が次数に等しい

問３． ４次の正方行列に対する、以下の右基本変形を表す基本行列を求めよ。
（１）１列目と３列目を入れ替える。
（２）３列目に－２をかける。
（３）４列目に２列目の－３倍を加える。

２．５　逆行列の計算

正則行列では階数が次数に等しいので、左基本変形のみによって単位行列に変形できる。つまり、

$$P_m\cdots P_2P_1A=E$$

となる。ここで、逆行列の定義より、

$$A^{-1} = P_m \cdots P_2 P_1$$

である。このことを利用して、逆行列を求めることができる。すなわち、行列Ａを単位行列Ｅに変形するための基本変形を、単位行列に対しても同様に行なえば逆行列が得られる。

例：$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 9 \\ 1 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$の逆行列を求める。

まず、行列Ａと単位行列Ｅを並べて書く。

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 9 \\ 1 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

はじめに、１行目を１／２倍する。

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 9/2 \\ 1 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

次に、１行目の－１倍を２行目に加える。

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 9/2 \\ 0 & 1 & 3/2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

２行目の－３倍を１行目に、－１倍を３行目に加える。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

３行目を２倍する。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

３行目の－３／２倍を２行目に加える。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -2 & 4 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

したがって、

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -2 & 4 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

以上の操作をまとめると、次のようになる。

１．ｎ次正方行列Ａに関して、左側に行列Ａ、右側に同じ型の単位行列を書く。

２．ｍ＝１,...，ｎについて以下の操作を反復する。両方の行列に対して同じ操作を行なう。

ａ．各行列の第ｍ行に１／（左側の行列の（ｍ，ｍ）成分）をかける。

ｂ．各行列の第ｍ行以外のすべての行（第ℓ行）について、その行列の第ｍ行の－（左側の行列の（ℓ，ｍ）成分）倍を、その行列の第ℓ行に

加える。
左側の行列の（m，m）成分がゼロになった場合は、他の行との入れ替えが必要である。どの行と入れ替えても左側の行列の（m，m）成分をゼロ以外の値にすることができない場合、つまり、左側の行列の第m列がすべてゼロである場合は、正則ではなく、逆行列は存在しない。

右基本変形によっても同様にして逆行列を求めることができる。ただし、左基本変形と右基本変形の両方を同時に用いてはならない。

問４． 次の行列の逆行列を求めよ。

（１）$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -3 & -4 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$　（２）$\begin{pmatrix} -2 & 4 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$　（３）$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

２．６　行列式

正方行列が正則であるか判定するために**行列式**(determinant)を用いることができる。２次の正方行列の逆行列の計算においては⊿＝ad－bc という量が重要な意味を持っていた。すなわち、⊿≠０であれば逆行列が存在して$A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$、⊿＝０であれば存在しなかった。そこで、⊿に相当する量を行列式と呼ぶことにする。行列Ａの行列式を｜Ａ｜または detＡと書き、次のように定義する。

２次の正方行列$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ に対して、｜Ａ｜＝$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$

以下では、３次以上の正方行列についても、行列式を定義することができないか考えてみる。

３次の正方行列$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ の場合には、

$D=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$ という数を定義すると、Ｄ≠０であれば逆行列が存在し、

$$A^{-1}=\frac{1}{D}\begin{pmatrix} a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32} & -a_{12}a_{33}+a_{13}a_{32} & a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22} \\ -a_{21}a_{33}+a_{23}a_{31} & a_{11}a_{33}-a_{13}a_{31} & -a_{11}a_{23}+a_{13}a_{21} \\ a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31} & -a_{11}a_{32}-a_{12}a_{31} & a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \end{pmatrix}$$

と書ける。Ｄ＝０であれば、逆行列は存在しない。そこで、３次の正方行列の行列式を次のように定義する。

３次の正方行列$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ に対して、

｜Ａ｜＝$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$

例１：$\det\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}=1$、例２：$\det\begin{pmatrix}2 & 6 & 9\\ 1 & 4 & 6\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}=1$

さて、ｎ次正方行列Ａ＝$(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\ldots,x_n)$の場合、$\vec{x}_\ell=\vec{x}_m$ならば、左基本変形を行なっても常に列目とｍ列目は同じなので、単位行列に変形できず、逆行列は存在しない。そこで、

$\triangle(\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_\ell,\ldots,\vec{x}_\ell,\ldots,x_n)=0$

となるような量△を定義してみる。別の見方として、

$\triangle(\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_\ell,\ldots,\vec{x}_m,\ldots,x_n)=-\triangle(\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_m,\ldots,\vec{x}_\ell,\ldots,x_n)$

となるような量△を定義すると考えてもよい。実際に上の式に$\ell=m$を代入すれば、△＝０になる。２次の場合、

$\triangle=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$

は、以上の条件をみたしている。３次の場合も、

$\triangle=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$

は、以上の条件をみたしている。２次と３次の場合の行列式の定義をみると、列番号を｛１，２｝とか｛１，２，３｝、｛２，３，１｝のように「正順」に並べたものを足し、｛２，１｝とか｛３，２，１｝、｛２，１，３｝のように「逆順」に並べたものを引いていることがわかる。

一般に、ｎ次の正方行列に対しては、**置換**(permutation)を用いて行列式を定義する。置換とはｎ個の自然数が並んだ数列｛１，２，…，ｎ｝を何回か並べ替える操作のことである。例えば、

ｎ＝４の場合、

数列｛１，２，３，４｝

↓　２番目の要素と３番目の要素を入れ替える

数列｛１，３，２，４｝

↓　３番目の要素と４番目の要素を入れ替える

数列｛１，３，４，２｝

のような置換を行なうことができる。このとき、置換σをσ（１）＝１、σ（２）＝３、σ（３）＝４、σ（４）＝２のように表す。一般に、ｎ個の要素の置換はｎ！個存在する。２つの要素を入れ替える１回の操作のことを互換という。偶数回の互換（入れ替え）によって表現される置換を偶置換、奇数回の互換によって表現される置換を奇置換という。一般に、ある置換が偶置換であるか奇置換であるかは一意に決まることがわかっている[4]。置換σの符号sgnσを、σが偶置換のときsgnσ＝１、奇置換のときsgnσ＝－１と定義する。このとき、ｎ次の正方行列の行列式は、

$$\det A=\sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}\sigma\cdot x_{1\sigma(1)}\cdot x_{2\sigma(2)}\cdots x_{n\sigma(n)}$$

と定義される。ここで、S_nはすべての置換の集合であり、$\sum_{\sigma\in S_n}$　はｎ個の要素に対する置換すべてに関する和を表す。

例：$\det\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&2&0\\0&3&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=1-6=-5$

以上のように定義された行列式が、逆行列の有無に対応しているか調べてみる。実は、行列式に関しては以下の性質が成り立っている[5]。

$$|A||B|=|AB|$$

ここで、行列Aに逆行列A^{-1}が存在するとする。このとき

$$AA^{-1}=E$$

が成り立つ。ゆえに

$$|A||A^{-1}|=|AA^{-1}|=|E|=1$$

$|A||A^{-1}|\neq 0$だから$|A|\neq 0$である。すなわち、行列Aの逆行列A^{-1}が存在すれば、行列式$|A|$の値はゼロではない。また、逆に、行列Aの行列式$|A|$の値がゼロでなければ、逆行列A^{-1}が存在することもわかっている[6]。つまり、

正則である　⇔　逆行列が存在する
⇔　階数が次数に等しい　⇔　行列式がゼロではない

問５．以下の行列の行列式を計算し、逆行列の有無を判定せよ。

（１）$\begin{pmatrix}-2&4&-3\\-2&3&0\\1&-2&2\end{pmatrix}$　（２）$\begin{pmatrix}-2&4&-3\\-2&4&0\\1&-2&2\end{pmatrix}$

（３）$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\3&1&-2&0\\0&2&-3&0\\2&0&0&1\end{pmatrix}$　（４）$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\2&1&-2&0\\4&2&-4&0\\2&0&0&1\end{pmatrix}$

課題２：①任意の正則なｎ次正方行列について、左基本変形によって逆行列を求めるプログラムを作成せよ。作成にあたっては以下の点に注意せよ。

1) 与える行列は正則であることを前提としてよい。また、基本変形の過程で「行の入れ替え」の必要は生じないことも前提としてよい。
2) 逆行列を求めるプログラムは INVMTX という名前のサブルーチン（C の場合は invmtx という名前の関数）として作成せよ。サブルーチン（関数）の中では、別に作成したサブルーチン（関数）を参照してもよい。
3) 主プログラム中ではｎの値は固定でよいが、サブルーチン（関数）は任意のｎに対して適用可能なもの（ｎの値を変更しても内部を書き替えなくてもよいもの）にせよ。

②適当な行列と、計算された逆行列との積を計算することによって、逆行列の演算が正しく行われたか検算せよ（提出は不要）。

③作成したサブルーチン（関数）を用いて以下の連立一次方程式を解け。

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 1 \\ 3x_1 - 2x_3 + 3x_4 = -2 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -1 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 4 \end{cases}$$

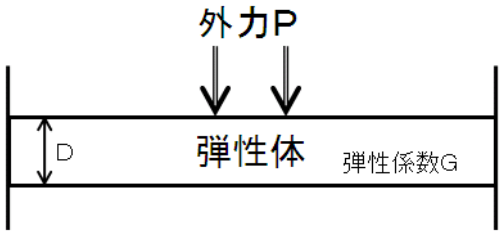
計算に用いたプログラム（①で作成したサブルーチンまたは関数を使って③を解いたもの）（prog02.f または prog02.c）と、逆行列と連立方程式の解を記したテキストファイル（answer02.txt）を提出せよ。主プログラム中ではｎの値（＝４）は固定し、入力する行列とベクトルを、DATA 文（C の場合は配列の初期値）として与えてよい。

応用例：

下の図のように、厚さD、せん断弾性係数μの弾性体に荷重を加えたときの応答（変形）を計算する。荷重によって外部から弾性体に加わる圧力をPとする。変形に伴う応力と、外部から弾性体に加わる圧力との間のつりあいを考えると、

$$\mu\frac{\partial^2}{\partial x^2}u+\frac{P}{D}=0$$

が成り立つことがわかる。ただし、uは弾性体の変形に伴う変位（下向きが正）である。



弾性体の左端から右端に向かって等間隔の格子点を順に定義し、それぞれの格子点における変位uをu_i（i＝1，2，…，N）とする。また、各格子点においてはたらく外力$\frac{P}{D}$の値をf_iとする。ここで、

$$\vec{u}=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\\vdots\\u_N\end{pmatrix},\quad \vec{f}=\begin{pmatrix}f_1\\f_2\\\vdots\\f_N\end{pmatrix}$$

と定義すれば、上の微分方程式は、

$$A\vec{u}=-\vec{f}$$

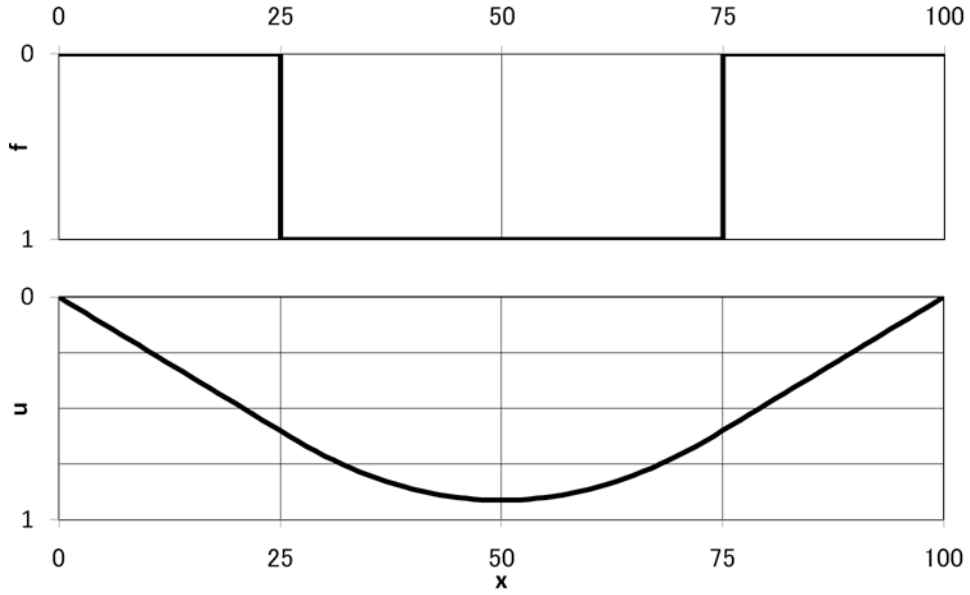
と書ける。ただし、Aはn次の正方行列であって、

$$A=\begin{pmatrix}-2\mu/\Delta x^2 & \mu/\Delta x^2 & & & & & & \\ \mu/\Delta x^2 & -2\mu/\Delta x^2 & \mu/\Delta x^2 & & & 0 & & \\ & \mu/\Delta x^2 & -2\mu/\Delta x^2 & \mu/\Delta x^2 & & & & \\ & & & \ddots & & & & \\ & & & & \mu/\Delta x^2 & -2\mu/\Delta x^2 & \mu/\Delta x^2 & \\ & 0 & & & & \mu/\Delta x^2 & -2\mu/\Delta x^2 & \mu/\Delta x^2 \\ & & & & & & \mu/\Delta x^2 & -2\mu/\Delta x^2\end{pmatrix}$$

である。外力を与えたときの弾性体の応答は、逆行列を用いて、

$$\vec{u}=-A^{-1}\vec{f}$$

で求めることができる。たとえば、次の図（上）のような外部強制に対して、弾性体は図（下）のように応答する。弾性体の中央部に荷重すると、全体が下へたわむことがわかる。この図では、荷重がかかっている中央部では放物線型の応答を示し、荷重がかかっていない周辺部では変位の分布は直線になっている。上の式で$\vec{f}$を変えれば、任意の荷重分布に対して変位の分布を計算することができる。



このような手法は、地震学や建築学、材料力学などでしばしば用いられる。気象学においても、非断熱加熱に対する大気の応答の計算などに利用することがある。

[1] 基本行列が正則であることを用いて証明する。次数が１のときは自明である。次数がｎ－１のときは命題が成り立っていると仮定する。次数ｎのとき、次数ｎの正方行列Ａが

$$AX = E$$

を満たすとする。適当な基本行列ＰとＱを用いて、

$$PAQ = \begin{pmatrix} A_1 & \vec{0} \\ \vec{0}^T & 1 \end{pmatrix}$$

とする。A_{n-1}は次数ｎ－１の正方行列である。このとき、行列$Q^{-1}XP^{-1}$を

$$Q^{-1}XP^{-1} = \begin{pmatrix} X_1 & \vec{y} \\ \vec{z}^T & w \end{pmatrix}$$

と表す。X_{n-1}は次数ｎ－１の正方行列である。ここで、

$$(PAQ)(Q^{-1}XP^{-1}) = \begin{pmatrix} A_1 & \vec{0} \\ \vec{0}^T & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 & \vec{y} \\ \vec{z}^T & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1X_1 & A_1\vec{y} \\ \vec{z}^T & w \end{pmatrix}$$

である。一方で、

$$(PAQ)(Q^{-1}XP^{-1}) = PA(QQ^{-1})XP^{-1} = PAXP^{-1} = PP^{-1} = E$$

だから、

$$A_1X_1 = E_1$$
$$A_1\vec{y} = \vec{0}$$
$$\vec{z}^T = \vec{0}^T$$
$$w = 1$$

が成り立つ。次数がｎ－１のときは命題が成り立っているので、

$$X_1A_1 = E_1$$
$$\vec{y} = \vec{0}$$

となる。これらを用いると、

$$(Q^{-1}XP^{-1})(PAQ) = \begin{pmatrix} X_1 & \vec{y} \\ \vec{z}^T & w \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 & \vec{0} \\ \vec{0}^T & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1A_1 & \vec{y} \\ \vec{z}^TA_1 & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1 & \vec{0} \\ \vec{0}^T & 1 \end{pmatrix} = E$$

である。したがって、

$$Q^{-1}XAQ = E$$

両辺に左からＱ、右からQ^{-1}をかけて、

$$XA = E$$

が得られる。数学的帰納法より、一般に命題が成り立つ。

[2] ｎ次の正方行列Ａが、基本変形によって、$P_1AQ_1 = E_r$と$P_2AQ_2 = E_s$（ｓ≧ｒ）の２通りに変形されたとする。基本変形を表す基本行列は正則だから、E_rとE_sの関係を

$$E_s = PE_rQ$$

と表せる。右辺を第１～ｒ成分と、第ｒ＋１～ｎ成分に分けて表すと、

$$PE_rQ = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_{11} & O_{12} \\ O_{21} & O_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{11}Q_{11} & P_{11}Q_{12} \\ P_{21}Q_{11} & P_{21}Q_{12} \end{pmatrix}$$

となる。$P_{11}Q_{11}$は単位行列だから、P_{11}は正則である。$P_{11}Q_{12}$は零行列だから、左から${P_{11}}^{-1}$をかければQ_{12}も零行列である。ゆえに、$P_{21}Q_{12}$は零行列であり、PE_rQの第ｒ＋１成分以降の対角成分はすべてゼロである。したがって、$E_s = PE_rQ$の階数はｒである。よって階数は一意に定まる。

[3] 階数が次数に等しい正方行列Ａについて、

$$P_k \cdots P_2P_1AQ_1Q_2 \cdots Q_\ell = E$$

のように基本変形を行なって単位行列に変形したとする。両辺に左から${P_1}^{-1}{P_2}^{-1} \cdots {P_k}^{-1}$をかけると、

$$AQ_1Q_2\cdots Q_\ell = {P_1}^{-1}{P_2}^{-1}\cdots {P_k}^{-1}$$

となる。続いて、両辺に右から$P_k\cdots P_2P_1$をかけると、

$$AQ_1Q_2\cdots Q_\ell P_k\cdots P_2P_1 = E$$

が得られる。右基本変形のみで単位行列に変形できることが示された。左基本変形の場合も同様に示される。

[4] n 個の要素の置換に関して、差積Δを

$$\Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{i<j}(x_i - x_j)$$

と定義する。Πは可能なすべての組み合わせについて積をとるという意味である。差積に置換σを作用させると、

$$\Delta^\sigma(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \Delta(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$$

となる。差積の定義より、一般に

$$\Delta^\sigma(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \pm\Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

である。置換σが互換τ_i、υ_iの積として２通りに表され、

$$\sigma = \tau_k \ldots \tau_2\tau_1 = \upsilon_\ell \ldots \upsilon_2\upsilon_1$$

とする。置換に互換τを１回だけ作用させたときには、簡単な計算より、

$$\Delta^\tau(x_1, x_2, \ldots, x_n) = -\Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

であることが示される。したがって、

$$(-1)^k\Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (-1)^\ell\Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

である。よって、kとℓの偶奇性は一致していなければならない。

[5] n 次の正方行列Ｘ、Ｙの積ＸＹは、

$$(XY)_{ij} = \sum_k x_{ik}y_{kj}$$

と書けるので、行列式det(XY)は、

$$\det(XY) = \sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}\sigma\prod_i\sum_k x_{ik}y_{k\sigma(i)}$$

と表すことができ、

$$\det(XY) = \sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}\sigma\sum_{\tau\in G_n}\prod_i x_{i\tau(i)}y_{\tau(i)\sigma(i)} = \sum_{\tau\in G_n}\sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}\sigma\prod_i x_{i\tau(i)}y_{\tau(i)\sigma(i)}$$

と変形できる。ここで、S_nはすべての置換の集合である。また、変換τは{1,2,…,n}から{1,2,…,n}への任意の変換であり、G_nは変換τの集合である。ここで、$\tau(i) = \tau(i')$（$i \neq i'$）をみたすｉ、ｉ’が存在するような変換τを考える。置換σ’を、置換σに対してｉとｉ’との互換をかけた置換として定義すると、

$$\sigma(i') = \sigma'(i),\ \ \sigma(i) = \sigma'(i'),\ \ \operatorname{sgn}\sigma' = -\operatorname{sgn}\sigma$$

が成り立つので、

$$\operatorname{sgn}\sigma'\prod_i x_{i\tau(i)}y_{\tau(i)\sigma\prime(i)} = \operatorname{sgn}\sigma'(\cdots x_{i\tau(i)}y_{\tau(i)\sigma\prime(i)}\cdots x_{i\prime\tau(i\prime)}y_{\tau(i\prime)\sigma\prime(i\prime)}\cdots)$$

$$= \operatorname{sgn}\sigma'(\cdots x_{i\tau(i)}y_{\tau(i)\sigma(i\prime)}\cdots x_{i\prime\tau(i\prime)}y_{\tau(i\prime)\sigma(i)}\cdots)$$

$$= \operatorname{sgn}\sigma'(\cdots x_{i\tau(i)}y_{\tau(i)\sigma(i)}\cdots x_{i\prime\tau(i\prime)}y_{\tau(i\prime)\sigma(i\prime)}\cdots)$$

$$= -\operatorname{sgn}\sigma(\cdots x_{i\tau(i)}y_{\tau(i)\sigma(i)}\cdots x_{i\prime\tau(i\prime)}y_{\tau(i\prime)\sigma(i\prime)}\cdots) = -\operatorname{sgn}\sigma\prod_i x_{i\tau(i)}y_{\tau(i)\sigma(i)}$$

と変形できる。つまり、ある置換σに対して、必ず、$\operatorname{sgn}\sigma\prod_i x_{i\tau(i)}y_{\tau(i)\sigma(i)}$の符号が逆になるような

置換σ’が存在する。したがって、$\tau(i)=\tau(i')$（$i\neq i'$）をみたすｉ、ｉ’が存在するような変換τを除外して和をとっても結果は変わらない。ゆえに、変換τとして置換のみを考えて、

$$\det(XY)=\sum_{\tau\in S_n}\sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}\sigma\prod_i x_{i\tau(i)}y_{\tau(i)\sigma(i)}=\sum_{\tau\in S_n}\sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}\sigma\prod_i x_{i\tau(i)}\prod_j y_{\tau(j)\sigma(j)}$$

と書くことができる。$\sigma=\upsilon\ \tau$となるような置換ρを定義すれば、

$$\det(XY)=\sum_{\tau\in S_n}\sum_{\upsilon\in S_n}\operatorname{sgn}\tau\operatorname{sgn}\upsilon\prod_i x_{i\tau(i)}\prod_j y_{\tau(j)\upsilon(\tau(j))}$$

$$=\sum_{\tau\in S_n}\sum_{\upsilon\in S_n}\operatorname{sgn}\tau\operatorname{sgn}\upsilon\prod_i x_{i\tau(i)}\prod_j y_{j\upsilon(j)}=\sum_{\tau\in S_n}\operatorname{sgn}\tau\prod_i x_{i\tau(i)}\sum_{\upsilon\in S_n}\operatorname{sgn}\upsilon\prod_j y_{j\upsilon(j)}$$

となるので、

$$\det(XY)=\det(X)\det(Y)$$

である。

[6] ｎ次の正方行列Ａに対して、**余因子**(cofactor)$\tilde{a}_{ij}$を

$$\tilde{a}_{ij}=(-1)^{i+j}D_{ij}$$

と定義する。ただし、D_{ij}は行列Ａの第ｉ行と第ｊ列だけを取り除いたｎ－１次の正方行列の行列式である。D_{ij}は行列Ａの(i,j)小行列式とよばれる。このとき、行列式の定義と性質から、

$$\sum_k \tilde{a}_{ik}a_{jk}=\delta_{ij}|A|$$

である。ここで、**余因子行列**(cofactor matrix)$\tilde{A}$を

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix}\tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{21} & \cdots & \tilde{a}_{n1}\\ \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \tilde{a}_{1n} & & & \tilde{a}_{nn}\end{pmatrix}$$

と定義すると、

$$A\tilde{A}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & & & a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{21} & \cdots & \tilde{a}_{n1}\\ \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \tilde{a}_{1n} & & & \tilde{a}_{nn}\end{pmatrix}=|A|E$$

が成り立つ。ゆえに、｜Ａ｜がゼロでなければ、

$$X=\frac{\tilde{A}}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix}\tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{21} & \cdots & \tilde{a}_{n1}\\ \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \tilde{a}_{1n} & & & \tilde{a}_{nn}\end{pmatrix}}{|A|}$$

はＡの逆行列である。したがって、｜Ａ｜がゼロでなければ逆行列が存在する。