気象科学特別演習

（2019 年度秋学期）

目次

気象学のための数学

１　一次変換

太陽のような天体の方位や高度は、時刻や季節、観測地点の緯度によって変化する。時刻や緯度などを与えて天体の方位、高度を計算するということは、天の北極や天の赤道を基準に表されていたベクトルを、天頂や水平線を基準に表されるベクトルに変換することであり、座標系の回転といってもよい。このような座標系の回転は、一次変換を用いて表すことができる。一次変換とは、行列をかけることによってベクトルを変換することである。ここでは一次変換による座標の変換を学び、天体の高度の計算に応用する。

１．１　一次変換

次のような関係式を用いて、点（ｘ，ｙ）を点（ｘ’，ｙ’）に変換することを考える。

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y \\ y' = a_{21}x + a_{22}y \end{cases}$$

この変換は、行列を用いて、

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & \mathrm{a}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

と書くこともできる。このように、点（ｘ，ｙ）から点（ｘ’，ｙ’）への変換を行列

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

で表すことができる。一般に、ある正方行列Ａを用いて、あるベクトル$\vec{x}$を

$$\vec{y} = \mathrm{A}\vec{x}$$

によってベクトル$\vec{y}$に変換するとき、この変換を行列Ａによって表わされる**一次変換**（線形変換）(linear transformation)という。

例１：

$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$は、ある点を原点の周りに反時計回りに９０°回転する変換を表す。

例２：

$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$は、ある点を平面ｚ＝０について対称な点に移動する変換を表す。

問１． 次の一次変換を表す行列を求めよ。

（１）２次元平面において、ある点（ｘ，ｙ）を直線ｙ＝ｘについて対称な点に移動する変換。

（２）３次元空間において、ある点（ｘ，ｙ，ｚ）を、ｚ軸の周りに（ｚ軸正の方向からみて）反時計回りに９０°回転した点に移動する変換。

１．２　直交行列

天の北極や天の赤道を基準に表されていたベクトルを、天頂や水平線を基準に表されるベクトルに変換することは、座標系の回転とみなせる。座標系全体を単に回転するだけであるから、ベクトルの大きさは変わらないし、２つのベクトルがなす角度も変わらないはずである。つまり、座標系を回転する一次変換は次の性質を満たすと考えられる：

１．任意のベクトルの大きさを変えない。

２．任意の異なる２つのベクトルのなす角度を変えない。

このような一次変換を表す行列をＡとして、行列Ａが満たすべき条件を考える。行列Ａは、任意のベクトル$\vec{x}$との大きさを変えないから、

$$(\mathrm{A}\vec{x})\cdot(\mathrm{A}\vec{x})=\vec{x}\cdot\vec{x}$$

また、行列Ａは、２つのベクトル$\vec{x}$、$\vec{y}$がなす角度θを変えないから、

$$\cos\theta=\frac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{\sqrt{\vec{x}\cdot\vec{x}}\sqrt{\vec{y}\cdot\vec{y}}},\qquad \cos\theta'=\frac{(\mathrm{A}\vec{x})\cdot(\mathrm{A}\vec{y})}{\sqrt{(\mathrm{A}\vec{x})\cdot(\mathrm{A}\vec{x})}\sqrt{(\mathrm{A}\vec{y})\cdot(\mathrm{A}\vec{y})}}$$

より、

$$\frac{(\mathrm{A}\vec{x})\cdot(\mathrm{A}\vec{y})}{\sqrt{(\mathrm{A}\vec{x})\cdot(\mathrm{A}\vec{x})}\sqrt{(\mathrm{A}\vec{y})\cdot(\mathrm{A}\vec{y})}}=\frac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{\sqrt{\vec{x}\cdot\vec{x}}\sqrt{\vec{y}\cdot\vec{y}}}$$

となるが、任意のベクトル$\vec{x}$について$(\mathrm{A}\vec{x})\cdot(\mathrm{A}\vec{x})=\vec{x}\cdot\vec{x}$であることを用いれば、

$$(\mathrm{A}\vec{x})\cdot(\mathrm{A}\vec{y})=\vec{x}\cdot\vec{y}$$

である。結局、任意の２つのベクトルを$\vec{x}$、$\vec{y}$とすると、これらの条件は

$$(\mathrm{A}\vec{x})\cdot(\mathrm{A}\vec{y})=\vec{x}\cdot\vec{y}$$

とまとめられる。内積の定義$\vec{x}\cdot\vec{y}=\vec{x}^{\mathrm{T}}\vec{y}$より、左辺は、

$$(\mathrm{A}\vec{x})\cdot(\mathrm{A}\vec{y})=(\mathrm{A}\vec{x})^{\mathrm{T}}(\mathrm{A}\vec{y})$$

と変形できる。ただし、A^{T}は、行列Ａの行と列を入れ替えることによって得られる行列であり、**転置行列**(transposed matrix)という。一般に２つの行列について$(\mathrm{AB})^{\mathrm{T}}=\mathrm{B}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}^{\mathrm{T}}$成り立つので、

$$(\mathrm{A}\vec{x})\cdot(\mathrm{A}\vec{y})=(\mathrm{A}\vec{x})^{\mathrm{T}}(\mathrm{A}\vec{y})=(\vec{x}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}^{\mathrm{T}})(\mathrm{A}\vec{y})=\vec{x}^{\mathrm{T}}(\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{A})\vec{y}$$

と変形できる。任意の２つのベクトル$\vec{x}$、$\vec{y}$について、$\vec{x}^{\mathrm{T}}(\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{A})\vec{y}=\vec{x}\cdot\vec{y}$となるためには、$\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}=\mathrm{E}$（Ｅは単位行列）でなければならない。ここで、$\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}=\mathrm{A}\mathrm{A}^{\mathrm{T}}=\mathrm{E}$を満たす行列を**直交行列**(orthogonal matrix)と定義する。なお、$\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}=\mathrm{E}$と$\mathrm{A}\mathrm{A}^{\mathrm{T}}=\mathrm{E}$のうち、どちらか一方が成り立てば他方も成り立つことがわかっている。

また、行列Ａの成分が複素数である場合に拡張して、行列Ａの行と列を入れ替え、さらに各成分を共役な複素数に置き換えることによって得られる行列を**随伴行列**(adjoint matrix)といい、A^{*}と表す。$\mathrm{A}^{*}\mathrm{A}=\mathrm{A}\mathrm{A}^{*}=\mathrm{E}$を満たす行列を**ユニタリ行列**(unitary matrix)と定義する。

一般にｎ次正方行列Ａ、Ｂの転置行列、随伴行列について以下の関係が成り立つ。

$$(\mathrm{AB})^{\mathrm{T}} = \mathrm{B}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}^{\mathrm{T}},\ (\mathrm{AB})^{*} = \mathrm{B}^{*}\mathrm{A}^{*}$$

ｎ次のユニタリ行列Ａを、Ａ＝$(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_{\mathrm{n}})$と表すと、

$$\vec{x}_{\mathrm{i}} \cdot \vec{x}_{\mathrm{j}} = \begin{cases} 1 \ (i = j) \\ 0 \ (i \neq j) \end{cases}$$

が成り立つ。

問２．任意の正方行列Ａ、Ｂについて、（ＡＢ）＊＝Ｂ＊Ａ＊が成り立つことを証明せよ。
ヒント：（ＡＢ）＊の(i, j)成分｛（ＡＢ）＊｝$_{\mathrm{ij}}$と、Ｂ＊Ａ＊の(i, j)成分｛Ｂ＊Ａ＊｝$_{\mathrm{ij}}$を、それぞれ、Ａの(i, j)成分ａ$_{\mathrm{ij}}$とＢの(i,j)成分ｂ$_{\mathrm{ij}}$で表せ。

問３．次の行列が直交行列であるか判定せよ。

（１）$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$　（２）$\begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$　（３）$\begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$　（４）$\begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

１．３　直交変換

座標系を回転する一次変換は、直交行列によって表すことができる。直交行列によって表わされる一次変換を**直交変換**(orthogonal transformation)という。

たとえば、２次元平面において、ある点$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\alpha \\ r\sin\alpha \end{pmatrix}$を原点の周りに反時計回りに角度$\theta$だけ回転して点$\vec{x}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\alpha+\theta) \\ r\sin(\alpha+\theta) \end{pmatrix}$に移すような一次変換を考える。三角関数の加法定理より、

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\alpha+\theta) \\ r\sin(\alpha+\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\alpha\cos\theta - r\sin\alpha\sin\theta \\ r\sin\alpha\cos\theta + r\cos\alpha\sin\theta \end{pmatrix}$$

だから、このような一次変換は、

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

と書くことができる。

この変換において、変換前の単位ベクトル$\vec{X} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ -\sin\theta \end{pmatrix}$はｘ方向の単位ベクトル$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$に、$\vec{Y} = \begin{pmatrix} \sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$はｙ方向の単位ベクトル$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$に変換される。このとき、直交変換を表す行列Ａは、座標軸方向の単位ベクトルに変換される単位ベクトルの組$\{\vec{X}, \vec{Y}\}$を用いて、

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \vec{X}^{\mathrm{T}} \\ \vec{Y}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}$$

と表される。２次元平面での直交変換は、たがいに直交する単位ベクトルの組$\{\vec{X},\vec{Y}\}$によって一意に定まる。

同様に、３次元空間での直交変換も、変換によってｘ方向、ｙ方向、ｚ方向の単位ベクトルに変換される単位ベクトルの組$\{\vec{\mathrm{X}},\vec{\mathrm{Y}},\vec{\mathrm{Z}}\}$によって一意に定まり、この直交変換を表す行列Ａを

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}\vec{X}^{\mathrm{T}}\\ \vec{Y}^{\mathrm{T}}\\ \vec{Z}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}$$

と書くことができる。

例１：３次元空間において、ある点（ｘ，ｙ，ｚ）をｚ軸の周りに反時計周りに角度θだけ回転移動する変換を表す行列は、

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

である。

例２：３次元空間において、点$\vec{\mathrm{X}}$＝$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$を$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$に、点$\vec{\mathrm{Y}}$＝$\begin{pmatrix}0\\1/2\\\sqrt{3}/2\end{pmatrix}$を$\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$に、点$\vec{\mathrm{Z}}$＝$\begin{pmatrix}0\\\sqrt{3}/2\\-1/2\end{pmatrix}$を$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$に移す変換を表す行列は、

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1/2 & \sqrt{3}/2\\ 0 & \sqrt{3}/2 & -1/2\end{pmatrix}$$

である（ベクトル$\vec{\mathrm{X}}$、$\vec{\mathrm{Y}}$、$\vec{\mathrm{Z}}$はたがいに直交する単位ベクトルである）。

直交行列Ａによって表わされる直交変換を行なった後で、直交行列Ｂによって表わされる直交変換を行なうような合成変換は、行列Ｃ＝ＢＡで表すことができる。このとき行列Ｃで表わされる合成変換も直交変換である。一般に、直交行列の積は直交行列である。

例：３次元空間において、ある点（ｘ，ｙ，ｚ）をｚ軸の周りに反時計周りに角度θだけ回転移動し、その後でさらに、ｘ軸の周りに（ｘ軸正の方向からみて）反時計周りに角度ϕだけ回転移動する変換を表す行列は、

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi\\ 0 & \sin\phi & \cos\phi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$
=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \cos\phi\sin\theta & \cos\phi\cos\theta & -\sin\phi \\ \sin\phi\sin\theta & \sin\phi\cos\theta & \cos\phi \end{pmatrix}
$$

である。

問４．次の直交変換を表す行列を求めよ。

（１）２次元平面において、ある点（ｘ，ｙ）を原点の周りに時計回りに３０°だけ回転移動する変換。

（２）３次元空間において、ある点（ｘ，ｙ，ｚ）をｚ軸の周りに（ｚ軸正の方向からみて）反時計周りに４５°だけ回転移動する変換。

（３）３次元空間において、点（$\sqrt{3}/2$，０，$-1/2$）を（１，０，０）に、点（０，１，０）を（０，１，０）に、点（$1/2$，０，$\sqrt{3}/2$）を（０，０，１）に回転移動する変換。

（４）３次元空間において、ある点（ｘ，ｙ，ｚ）をｚ軸の周りに（ｚ軸正の方向からみて）反時計周りに４５°だけ回転移動し、その後でさらに、ｘ軸の周りに（ｘ軸正の方向からみて）反時計周りに３０°だけ回転移動する変換。

課題１：緯度ϕ（°）、太陽の赤緯δ（°）（天の赤道より北にあるとき正)、時角Ｈ（°）（南中時に０°、６時間後に９０°）を入力すると、太陽の高度（°）を出力するプログラムを作成せよ。FORTRAN においては、正弦関数 sin x は SIN(X)、余弦関数 cos x は COS(X)、正弦関数の逆関数 $\sin^{-1}x$ は ASIN(X)と書く（C の場合は関数名はすべて小文字)。プログラム中では角度はラジアンである点に注意せよ。なお、単精度の実数（浮動小数点）の精度は１０進数で７桁程度であるので、円周率の値を明示的に与えるときは８桁程度の有効数字で記述するとよい。作成したプログラムを prog01.f または prog01.c として提出せよ。

ヒント：赤緯－時角座標系（ｘ軸：赤緯δ＝０°・時角Ｈ＝９０°、ｙ軸：赤緯δ＝０°・時角Ｈ＝０°、ｚ軸：赤緯δ＝９０°）から高度－方位座標系（Ｘ軸：西、Ｙ軸：南、Ｚ軸：上）への変換を考える。高度－方位座標系に変換したときに真西、真南、真上方向の単位ベクトルになるようなベクトルは、赤緯－時角座標系においてどのように表されているか。

一般には、（ｘ，ｙ，ｚ）＝（$\cos\delta\sin H$，$\cos\delta\cos H$，$\sin\delta$）

δ＝０°，Ｈ＝９０°　→　真西：

（ｘ，ｙ，ｚ）＝（１，０，０）　→　（Ｘ，Ｙ，Ｚ）＝（１，０，０）

δ＝ϕ－９０°，Ｈ＝０°　→　真南：

（ｘ，ｙ，ｚ）＝（０，$\sin\phi$，$\cos\phi$）　→　（Ｘ，Ｙ，Ｚ）＝（０，１，０）

δ＝ϕ，Ｈ＝０°　→　真上：

（ｘ，ｙ，ｚ）＝（０，$\cos\phi$，$\sin\phi$）　→　（Ｘ，Ｙ，Ｚ）＝（０，０，１）

Ｘの値＝一般のベクトルと真西ベクトルの内積＝$\cos\delta\sin H$

Ｙの値＝一般のベクトルと真南ベクトルの内積＝$\cos\delta\cos H\sin\phi+\sin\delta\cos\phi$

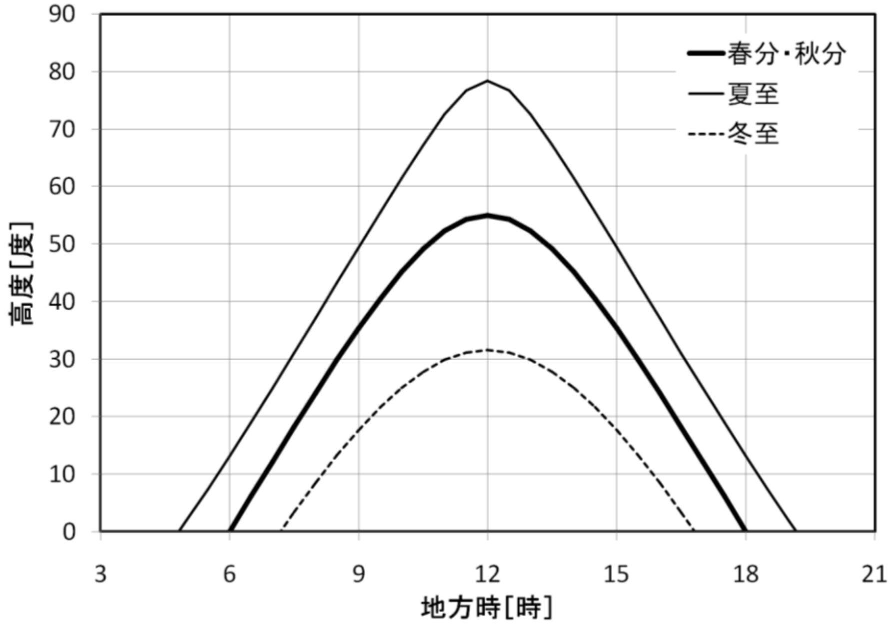
Ｚの値＝一般のベクトルと真上ベクトルの内積＝$\cos\delta\cos H\cos\phi+\sin\delta\sin\phi$

行列を用いて表すと、

$$
\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin\phi & -\cos\phi \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin\phi & -\cos\phi \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\delta\sin H \\ \cos\delta\cos H \\ \sin\delta \end{pmatrix}
$$

応用例：

北緯３５°で、春分・秋分、夏至、冬至における太陽高度の日変化を計算すると、図のような結果が得られる。



この結果から、大気上端での日射の強さの日変化を求めたり、それを時間積分することによって日射の日積算量を計算したりすることもできる。