

## 2 逆行列

逆行列の計算は、連立一次方程式を数値的に解くために利用される。気象学分野では線形系の応答問題を数値的に解くときに用いられることも多い。ここでは計算機を用いて逆行列を求める方法を学ぶ。

### 2.1 はじめに

たとえば、次のような連立一次方程式を解くことを考える。

$$\begin{cases} 7x + 5y = 9 \\ 3x + 2y = 4 \end{cases}$$

このような2元連立一次方程式は、代入法や消去法によって容易に解くことができる。解法をプログラミング言語によって記述することも困難ではない。では、次のような多元連立一次方程式はどうであろうか。

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 1 \\ 3x_1 - 2x_3 + 3x_4 = -2 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -1 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 4 \end{cases}$$

原理的には、未知数と方程式の数が増えても、2元連立一次方程式の場合と同様に代入法や消去法によって解くことができるはずである。しかし現実には、計算の手順は煩雑となり、プログラミング言語によって記述することも容易ではなくなる。n元連立一次方程式の解法を一般的に記述する方法はないだろうか。実は、このようなときには、連立一次方程式を行列によって記述すると便利である。すなわち、上の連立方程式は、

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

と書きかえることが可能である。もし、左辺の行列の逆行列を求めることができれば、この連立一次方程式の解は、

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

として計算することができる。以下では、このようなn次正方行列の逆行列を一般的に計算する方法を考えてみる。

### 2.2 正則行列と逆行列

ある正方行列Aについて、

$$AX = XA = E \quad (E \text{ は } A \text{ と同じ型の単位行列})$$

となる正方行列Xが存在するとき、XをAの**逆行列**(inverse matrix)といい、 $A^{-1}$ で表す。なお、あとで述べるように、 $AX = E$ と $XA = E$ のうち、どちらか一方が成り立てば他方も成り立つ。

例1 :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{に対して、} A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

例 2 :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 9 \\ 1 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{に対して、} A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -2 & 4 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

逆行列は常に存在するとは限らない。逆行列が存在する行列を**正則行列**(regular matrix)という。

### 正則である ⇔ 逆行列が存在する

一般に、正則行列  $A$  の逆行列  $A^{-1}$  も正則であり、

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

が成り立つ。また、2つの正則行列  $A$ 、 $B$  の積  $AB$  は正則であり、逆行列は、

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

である。

また、一般に、 $AX = E$  が成り立てば、 $XA = E$  も成り立つことがわかっている<sup>1</sup>。

2次の正方行列  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  に対して、 $\Delta = ad - bc$  とおくと、

$$\Delta \neq 0 \text{ならば、} A \text{は正則であり、} A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$\Delta = 0$  ならば、 $A$  は正則ではない。

**問 1.** 以下の行列の逆行列を求めよ。

$$(1) \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$$

### 2. 3 連立一次方程式と逆行列

逆行列を使って連立一次方程式を解くことを考える。たとえば、

$$\begin{cases} 2x + 6y + 9z = 3 \\ x + 4y + 6z = 1 \\ y + 2z = -2 \end{cases}$$

に関して、

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 9 \\ 1 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

とおくと、この連立一次方程式を

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

と表現することができる。ここで行列  $A$  が正則であれば、

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$$

となり、逆行列 $A^{-1}$ とベクトル $\vec{b}$ の積を計算することによってベクトル $\vec{x}$ を求めることができる。上の例では、行列 $A$ は実際に正則であって、

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -2 & 4 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

だから、

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -2 & 4 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

となって、

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \\ z = -3 \end{cases}$$

であることがわかる。

**問2.** 以下の連立1次方程式を、逆行列を用いて解け。ただし、(3)では上の結果を用いてよい。

$$(1) \begin{cases} 7x + 5y = 9 \\ 3x + 2y = 4 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} 5x - 3y = 14 \\ 2x + y = -1 \end{cases} \quad (3) \begin{cases} 2x + 6y + 9z = 2 \\ x + 4y + 6z = 5 \\ y + 2z = -1 \end{cases}$$

## 2. 4 基本変形と階数

正方行列 $A$ に対して行列 $X$ で表現されるような変換を行なって単位行列に変換できたとする。このとき、 $XA = E$ だから、行列 $A$ の逆行列は $A^{-1} = X$ である。つまり、行列 $A$ を単位行列に変換する操作を行なえば、行列 $A$ の逆行列を求めることができる。

正方行列 $A$ に対して行なわれる、以下のような操作を**左基本変形**（行基本変形）(elementary row operation)という。

1. 二つの行を入れ替える。
2. ある行に0でない数をかける。
3. ある行に他のある行の定数倍を加える。

これらの操作は、行列 $A$ に対して左からある正方行列 $P$ をかける演算として表現できる。このとき行列 $P$ を**基本行列**(elementary matrix)という。

例1：2行目と3行目を入れ替える。

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

例2：2行目に3をかける。

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



$$A^{-1} = P_m \cdots P_2 P_1$$

である。このことを利用して、逆行列を求めることができる。すなわち、行列Aを単位行列Eに変形するための基本変形を、単位行列に対しても同様に行なえば逆行列が得られる。

例：A =  $\begin{pmatrix} 2 & 6 & 9 \\ 1 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$  の逆行列を求める。

まず、行列Aと単位行列Eを並べて書く。

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 9 \\ 1 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

はじめに、1行目を1/2倍する。

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 9/2 \\ 1 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

次に、1行目の-1倍を2行目に加える。

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 9/2 \\ 0 & 1 & 3/2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2行目の-3倍を1行目に、-1倍を3行目に加える。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

3行目を2倍する。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

3行目の-3/2倍を2行目に加える。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -2 & 4 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

したがって、

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -2 & 4 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

以上の操作をまとめると、次のようになる。

1. n次正方行列Aに関して、左側に行列A、右側に同じ型の単位行列を書く。
2.  $m = 1, \dots, n$  について以下の操作を反復する。両方の行列に対して同じ操作を行なう。
  - a. 各行列の第m行に1/(左側の行列の(m, m)成分)をかける。
  - b. 各行列の第m行以外のすべての行(第*l*行)について、その行列の第m行の-(左側の行列の(*l*, m)成分)倍を、その行列の第*l*行に

加える。

左側の行列の  $(m, m)$  成分がゼロになった場合は、他の行との入れ替えが必要である。どの行と入れ替えても左側の行列の  $(m, m)$  成分をゼロ以外の値にすることができない場合、つまり、左側の行列の第  $m$  列がすべてゼロである場合は、正則ではなく、逆行列は存在しない。

右基本変形によっても同様にして逆行列を求めることができる。ただし、左基本変形と右基本変形の両方を同時に用いてはならない。

**問 4.** 次の行列の逆行列を求めよ。

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -3 & -4 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} -2 & 4 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## 2. 6 行列式

正方行列が正則であるか判定するために**行列式(determinant)**を用いることができる。2次の正方行列の逆行列の計算においては  $\Delta = ad - bc$  という量が重要な意味を持っていた。すなわち、 $\Delta \neq 0$  であれば逆行列が存在して  $A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ 、 $\Delta = 0$  であれば存在しなかった。そこで、 $\Delta$  に相当する量を行列式と呼ぶことにする。行列  $A$  の行列式を  $|A|$  または  $\det A$  と書き、次のように定義する。

$$2 \text{ 次の正方行列 } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \text{ に対して、 } |A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

以下では、3次以上の正方行列についても、行列式を定義することができないか考えてみる。

$$3 \text{ 次の正方行列 } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \text{ の場合には、}$$

$D = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$  という数を定義すると、 $D \neq 0$  であれば逆行列が存在し、

$$A^{-1} = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32} & -a_{12}a_{33} + a_{13}a_{32} & a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22} \\ -a_{21}a_{33} + a_{23}a_{31} & a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31} & -a_{11}a_{23} + a_{13}a_{21} \\ a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31} & -a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31} & a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \end{pmatrix}$$

と書ける。 $D = 0$  であれば、逆行列は存在しない。そこで、3次の正方行列の行列式を次のように定義する。

$$3 \text{ 次の正方行列 } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \text{ に対して、}$$

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

例 1 :  $\det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 1$ 、例 2 :  $\det \begin{pmatrix} 2 & 6 & 9 \\ 1 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 1$

さて、 $n$  次正方行列  $A = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$  の場合、 $\vec{x}_l = \vec{x}_m$  ならば、左基本変形を行なっても常に列目と  $m$  列目は同じなので、単位行列に変形できず、逆行列は存在しない。そこで、

$$\triangle (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_l, \dots, \vec{x}_l, \dots, \vec{x}_n) = 0$$

となるような量  $\triangle$  を定義してみる。別の見方として、

$$\triangle (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_l, \dots, \vec{x}_m, \dots, \vec{x}_l, \dots, \vec{x}_n) = -\triangle (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m, \dots, \vec{x}_l, \dots, \vec{x}_n)$$

となるような量  $\triangle$  を定義すると考えてもよい。実際に上の式に  $l=m$  を代入すれば、 $\triangle = 0$  になる。2 次の場合、

$$\triangle = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

は、以上の条件をみたしている。3 次の場合も、

$$\triangle = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

は、以上の条件をみたしている。2 次と 3 次の場合の行列式の定義をみると、列番号を  $\{1, 2\}$  とか  $\{1, 2, 3\}$ 、 $\{2, 3, 1\}$  のように「正順」に並べたものを足し、 $\{2, 1\}$  とか  $\{3, 2, 1\}$ 、 $\{2, 1, 3\}$  のように「逆順」に並べたものを引いていることがわかる。

一般に、 $n$  次の正方行列に対しては、**置換**(permutation)を用いて行列式を定義する。置換とは  $n$  個の自然数が並んだ数列  $\{1, 2, \dots, n\}$  を何回か並べ替える操作のことである。例えば、

$n = 4$  の場合、

数列  $\{1, 2, 3, 4\}$

↓ 2 番目の要素と 3 番目の要素を入れ替える

数列  $\{1, 3, 2, 4\}$

↓ 3 番目の要素と 4 番目の要素を入れ替える

数列  $\{1, 3, 4, 2\}$

のような置換を行なうことができる。このとき、置換  $\sigma$  を  $\sigma(1) = 1$ 、 $\sigma(2) = 3$ 、 $\sigma(3) = 4$ 、 $\sigma(4) = 2$  のように表す。一般に、 $n$  個の要素の置換は  $n!$  個存在する。2 つの要素を入れ替える 1 回の操作のことを互換という。偶数回の互換 (入れ替え) によって表現される置換を偶置換、奇数回の互換によって表現される置換を奇置換という。一般に、ある置換が偶置換であるか奇置換であるかは一意に決まることがわかっている<sup>4</sup>。置換  $\sigma$  の符号  $\text{sgn } \sigma$  を、 $\sigma$  が偶置換のとき  $\text{sgn } \sigma = 1$ 、奇置換のとき  $\text{sgn } \sigma = -1$  と定義する。このとき、 $n$  次正方行列の行列式は、

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn } \sigma \cdot x_{1\sigma(1)} \cdot x_{2\sigma(2)} \cdots x_{n\sigma(n)}$$

と定義される。ここで、 $S_n$  はすべての置換の集合であり、 $\sum_{\sigma \in S_n}$  は  $n$  個の要素に対する置換すべてに関する和を表す。

$$\text{例 : } \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 - 6 = -5$$

以上のように定義された行列式が、逆行列の有無に対応しているか調べてみる。実は、行列式に関しては以下の性質が成り立っている<sup>5</sup>。

$$|A| |B| = |AB|$$

ここで、行列Aに逆行列 $A^{-1}$ が存在するとする。このとき

$$AA^{-1} = E$$

が成り立つ。ゆえに

$$|A| |A^{-1}| = |AA^{-1}| = |E| = 1$$

$|A| |A^{-1}| \neq 0$ だから $|A| \neq 0$ である。すなわち、行列Aの逆行列 $A^{-1}$ が存在すれば、行列式 $|A|$ の値はゼロではない。また、逆に、行列Aの行列式 $|A|$ の値がゼロでなければ、逆行列 $A^{-1}$ が存在することもわかっている<sup>6</sup>。つまり、

$$\begin{aligned} & \text{正則である} \Leftrightarrow \text{逆行列が存在する} \\ & \Leftrightarrow \text{階数が次数に等しい} \Leftrightarrow \text{行列式がゼロではない} \end{aligned}$$

**問5.** 以下の行列の行列式を計算し、逆行列の有無を判定せよ。

$$(1) \begin{pmatrix} -2 & 4 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} -2 & 4 & -3 \\ -2 & 4 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \\ 4 & 2 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**課題2 :** ①任意の正則な $n$ 次正方行列について、左基本変形によって逆行列を求めるプログラムを作成せよ。作成にあたっては以下の点に注意せよ。

- 1) 与える行列は正則であることを前提としてよい。また、基本変形の過程で「行の入れ替え」の必要は生じないことも前提としてよい。
- 2) 逆行列を求めるプログラムは INVMTX という名前のサブルーチン (C の場合は invmtx という名前の関数) として作成せよ。サブルーチン (関数) の中では、別に作成したサブルーチン (関数) を参照してもよい。
- 3) 主プログラム中では $n$ の値は固定でよいが、サブルーチン (関数) は任意の $n$ に対して適用可能なもの ( $n$ の値を変更しても内部を書き替えなくてもよいもの) にせよ。

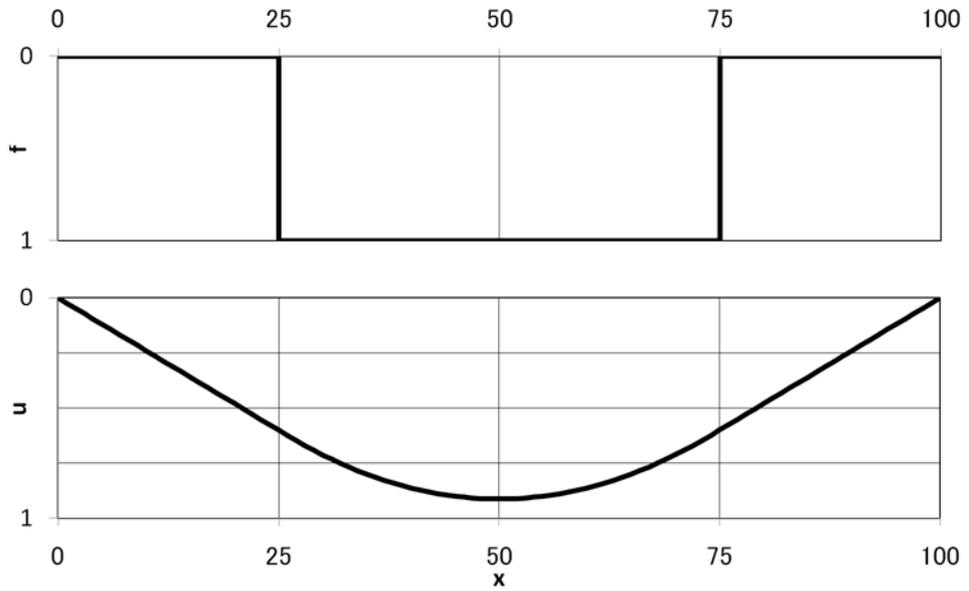
②適当な行列と、計算された逆行列との積を計算することによって、逆行列の演算が正しく行われたか検算せよ (提出は不要)。

③作成したサブルーチン (関数) を用いて以下の連立一次方程式を解け。

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 1 \\ 3x_1 - 2x_3 + 3x_4 = -2 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -1 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 4 \end{cases}$$

計算に用いたプログラム (①で作成したサブルーチンまたは関数を使って③を解いたもの) (prog02.f または prog02.c) と、逆行列と連立方程式の解を記したテキストファイル (answer02.txt) を提出せよ。主プログラム中ではnの値 (= 4) は固定し、入力する行列とベクトルを、DATA 文 (C の場合は配列の初期値) として与えてよい。





このような手法は、地震学や建築学、材料力学などでしばしば用いられる。気象学においても、非断熱加熱に対する大気の応答の計算などに利用することがある。

<sup>1</sup>基本行列が正則であることを用いて証明する。次数が 1 のときは自明である。次数が  $n - 1$  のときは命題が成り立っていると仮定する。次数  $n$  のとき、次数  $n$  の正方行列  $A$  が

$$AX = E$$

を満たすとす。適当な基本行列  $P$  と  $Q$  を用いて、

$$PAQ = \begin{pmatrix} A_1 & \vec{0} \\ \vec{0}^T & 1 \end{pmatrix}$$

とする。  $A_{n-1}$  は次数  $n - 1$  の正方行列である。このとき、行列  $Q^{-1}XP^{-1}$  を

$$Q^{-1}XP^{-1} = \begin{pmatrix} X_1 & \vec{y} \\ \vec{z}^T & w \end{pmatrix}$$

と表す。  $X_{n-1}$  は次数  $n - 1$  の正方行列である。ここで、

$$(PAQ)(Q^{-1}XP^{-1}) = \begin{pmatrix} A_1 & \vec{0} \\ \vec{0}^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 & \vec{y} \\ \vec{z}^T & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1X_1 & A_1\vec{y} \\ \vec{z}^T & w \end{pmatrix}$$

である。一方で、

$$(PAQ)(Q^{-1}XP^{-1}) = PA(QQ^{-1})XP^{-1} = PAXP^{-1} = PP^{-1} = E$$

だから、

$$\begin{aligned} A_1X_1 &= E_1 \\ A_1\vec{y} &= \vec{0} \\ \vec{z}^T &= \vec{0}^T \\ w &= 1 \end{aligned}$$

が成り立つ。次数が  $n - 1$  のときは命題が成り立っているので、

$$\begin{aligned} X_1A_1 &= E_1 \\ \vec{y} &= \vec{0} \end{aligned}$$

となる。これらを用いると、

$$(Q^{-1}XP^{-1})(PAQ) = \begin{pmatrix} X_1 & \vec{y} \\ \vec{z}^T & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & \vec{0} \\ \vec{0}^T & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1A_1 & \vec{y} \\ \vec{z}^TA_1 & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1 & \vec{0} \\ \vec{0}^T & 1 \end{pmatrix} = E$$

である。したがって、

$$Q^{-1}XAQ = E$$

両辺に左から  $Q$ 、右から  $Q^{-1}$  をかけて、

$$XA = E$$

が得られる。数学的帰納法より、一般に命題が成り立つ。

<sup>2</sup>  $n$  次正方行列  $A$  が、基本変形によって、  $P_1AQ_1 = E_r$  と  $P_2AQ_2 = E_s$  ( $s \geq r$ ) の 2 通りに変形されたとする。基本変形を表す基本行列は正則だから、  $E_r$  と  $E_s$  の関係を

$$E_s = PE_rQ$$

と表せる。右辺を第 1 ~  $r$  成分と、第  $r + 1$  ~  $n$  成分に分けて表すと、

$$PE_rQ = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{11} & O_{12} \\ O_{21} & O_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{11}Q_{11} & P_{11}Q_{12} \\ P_{21}Q_{11} & P_{21}Q_{12} \end{pmatrix}$$

となる。  $P_{11}Q_{11}$  は単位行列だから、  $P_{11}$  は正則である。  $P_{11}Q_{12}$  は零行列だから、左から  $P_{11}^{-1}$  をかければ  $Q_{12}$  も零行列である。ゆえに、  $P_{21}Q_{12}$  は零行列であり、  $PE_rQ$  の第  $r + 1$  成分以降の対角成分はすべてゼロである。したがって、  $E_s = PE_rQ$  の階数は  $r$  である。よって階数は一意に定まる。

<sup>3</sup> 階数が次数に等しい正方行列  $A$  について、

$$P_k \cdots P_2 P_1 A Q_1 Q_2 \cdots Q_n = E$$

のように基本変形を行なって単位行列に変形したとする。両辺に左から  $P_1^{-1}P_2^{-1} \cdots P_k^{-1}$  をかけると、

$$AQ_1Q_2 \cdots Q_0 = P_1^{-1}P_2^{-1} \cdots P_k^{-1}$$

となる。続いて、両辺に右から  $P_k \cdots P_2P_1$  をかけると、

$$AQ_1Q_2 \cdots Q_0P_k \cdots P_2P_1 = E$$

が得られる。右基本変形のみで単位行列に変形できることが示された。左基本変形の場合も同様に示される。

$4n$  個の要素の置換に関して、差積  $\Delta$  を

$$\Delta(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i < j} (x_i - x_j)$$

と定義する。 $\Pi$  は可能なすべての組み合わせについて積をとるという意味である。差積に置換  $\sigma$  を作用させると、

$$\Delta^\sigma(x_1, x_2, \dots, x_n) = \Delta(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(n)})$$

となる。差積の定義より、一般に

$$\Delta^\sigma(x_1, x_2, \dots, x_n) = \pm \Delta(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

である。置換  $\sigma$  が互換  $\tau_i$ 、 $\nu_i$  の積として 2 通りに表され、

$$\sigma = \tau_k \cdots \tau_2 \tau_1 = \nu_l \cdots \nu_2 \nu_1$$

とする。置換に互換  $\tau$  を 1 回だけ作用させたときには、簡単な計算より、

$$\Delta^\tau(x_1, x_2, \dots, x_n) = -\Delta(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

であることが示される。したがって、

$$(-1)^k \Delta(x_1, x_2, \dots, x_n) = (-1)^l \Delta(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

である。よって、 $k$  と  $l$  の偶奇性は一致していなければならない。

$5n$  次の正方行列  $X$ 、 $Y$  の積  $XY$  は、

$$(XY)_{ij} = \sum_k x_{ik} y_{kj}$$

と書けるので、行列式  $\det(XY)$  は、

$$\det(XY) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn } \sigma \prod_i \sum_k x_{ik} y_{k\sigma(i)}$$

と表すことができ、

$$\det(XY) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn } \sigma \sum_{\tau \in G_n} \prod_i x_{i\tau(i)} y_{\tau(i)\sigma(i)} = \sum_{\tau \in G_n} \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn } \sigma \prod_i x_{i\tau(i)} y_{\tau(i)\sigma(i)}$$

と変形できる。ここで、 $S_n$  はすべての置換の集合である。また、変換  $\tau$  は  $\{1, 2, \dots, n\}$  から  $\{1, 2, \dots, n\}$  への任意の変換であり、 $G_n$  は変換  $\tau$  の集合である。ここで、 $\tau(i) = \tau(i')$  ( $i \neq i'$ ) をみたく  $i$ 、 $i'$  が存在するような変換  $\tau$  を考える。置換  $\sigma'$  を、置換  $\sigma$  に対して  $i$  と  $i'$  との互換をかけた置換として定義すると、

$$\sigma(i') = \sigma'(i), \quad \sigma(i) = \sigma'(i'), \quad \text{sgn } \sigma' = -\text{sgn } \sigma$$

が成り立つので、

$$\begin{aligned} \text{sgn } \sigma' \prod_i x_{i\tau(i)} y_{\tau(i)\sigma(i)} &= \text{sgn } \sigma' (\cdots x_{i\tau(i)} y_{\tau(i)\sigma(i)} \cdots x_{i'\tau(i')} y_{\tau(i')\sigma(i')} \cdots) \\ &= \text{sgn } \sigma' (\cdots x_{i\tau(i)} y_{\tau(i)\sigma(i')} \cdots x_{i'\tau(i')} y_{\tau(i')\sigma(i)} \cdots) \\ &= \text{sgn } \sigma' (\cdots x_{i\tau(i)} y_{\tau(i)\sigma(i)} \cdots x_{i'\tau(i')} y_{\tau(i')\sigma(i')} \cdots) \\ &= -\text{sgn } \sigma (\cdots x_{i\tau(i)} y_{\tau(i)\sigma(i)} \cdots x_{i'\tau(i')} y_{\tau(i')\sigma(i')} \cdots) = -\text{sgn } \sigma \prod_i x_{i\tau(i)} y_{\tau(i)\sigma(i)} \end{aligned}$$

と変形できる。つまり、ある置換  $\sigma$  に対して、必ず、 $\text{sgn } \sigma \prod_i x_{i\tau(i)} y_{\tau(i)\sigma(i)}$  の符号が逆になるような

置換  $\sigma'$  が存在する。したがって、 $\tau(i) = \tau(i')$  ( $i \neq i'$ ) をみたま  $i, i'$  が存在するような変換  $\tau$  を除外して和をとっても結果は変わらない。ゆえに、変換  $\tau$  として置換のみを考えて、

$$\det(XY) = \sum_{\tau \in S_n} \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \prod_i x_{i\tau(i)} y_{\tau(i)\sigma(i)} = \sum_{\tau \in S_n} \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \prod_i x_{i\tau(i)} \prod_j y_{\tau(j)\sigma(j)}$$

と書くことができる。  $\sigma = \nu \tau$  となるような置換  $\nu$  を定義すれば、

$$\begin{aligned} \det(XY) &= \sum_{\tau \in S_n} \sum_{\nu \in S_n} \operatorname{sgn} \tau \operatorname{sgn} \nu \prod_i x_{i\tau(i)} \prod_j y_{\tau(j)\nu(\tau(j))} \\ &= \sum_{\tau \in S_n} \sum_{\nu \in S_n} \operatorname{sgn} \tau \operatorname{sgn} \nu \prod_i x_{i\tau(i)} \prod_j y_{\nu(j)} = \sum_{\tau \in S_n} \operatorname{sgn} \tau \prod_i x_{i\tau(i)} \sum_{\nu \in S_n} \operatorname{sgn} \nu \prod_j y_{\nu(j)} \end{aligned}$$

となるので、

$$\det(XY) = \det(X)\det(Y)$$

である。

$n$  次<sup>6</sup>の正方行列  $A$  に対して、**余因子**(cofactor)  $\tilde{a}_{ij}$  を

$$\tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}$$

と定義する。ただし、 $D_{ij}$  は行列  $A$  の第  $i$  行と第  $j$  列だけを取り除いた  $n-1$  次<sup>6</sup>の正方行列の行列式である。 $D_{ij}$  は行列  $A$  の  $(i,j)$  小行列式とよばれる。このとき、行列式の定義と性質から、

$$\sum_k \tilde{a}_{ik} a_{jk} = \delta_{ij} |A|$$

である。ここで、**余因子行列**(cofactor matrix)  $\tilde{A}$  を

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{21} & \cdots & \tilde{a}_{n1} \\ \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \tilde{a}_{1n} & & & \tilde{a}_{nn} \end{pmatrix}$$

と定義すると、

$$A\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & & & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{21} & \cdots & \tilde{a}_{n1} \\ \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \tilde{a}_{1n} & & & \tilde{a}_{nn} \end{pmatrix} = |A|E$$

が成り立つ。ゆえに、 $|A|$  がゼロでなければ、

$$X = \frac{\tilde{A}}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{21} & \cdots & \tilde{a}_{n1} \\ \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \tilde{a}_{1n} & & & \tilde{a}_{nn} \end{pmatrix}}{|A|}$$

は  $A$  の逆行列である。したがって、 $|A|$  がゼロでなければ逆行列が存在する。