

数値計算で学ぶ物理学

4 放物運動と惑星運動

地上のように下向きに重力がはたらいっているような場においては、物体を投げると放物運動をする。一方、中心星のまわりの重力場中では、惑星は、円、だ円、放物線または双曲線を描きながら運動する。ここでは、放物運動と惑星運動を、運動方程式を導出したうえで、数値シミュレーションによって計算してみる。

4. 1 放物運動

一様な重力場における放物運動を考える。一般に質量 m の物体に作用する力を \vec{F} とすると運動方程式は、

$$m \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = \vec{F}$$

と書ける。ただし、 $\vec{x} = (x, y, z)$ は物体の位置ベクトルである。一様な下向きの重力場を考えると、力 \vec{F} は、

$$\vec{F} = m\vec{g}$$

と表せる。ただし、 $\vec{g} = (0, 0, -g)$ 、 g は重力加速度である。このとき、運動方程式は、

$$m \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = m\vec{g}$$

と書くことができる。ここで、 $\frac{d}{dt} \vec{x} = \vec{u} = (u, v, w)$ とすると、運動方程式は、

$$m \frac{d}{dt} \vec{u} = m\vec{g}$$

と表され、各成分は、

$$m \frac{d}{dt} u = 0 \tag{1}$$

$$m \frac{d}{dt} v = 0 \tag{2}$$

$$m \frac{d}{dt} w = -mg \tag{3}$$

と書ける。

ここで、 $U = mgz$ という量を導入すると、運動方程式を

$$m \frac{d^2}{dt^2} \vec{x} = -\nabla U$$

と表すことができる。この U を**ポテンシャルエネルギー（位置エネルギー）**(potential energy)という。このように、物体にはたらく力がポテンシャルの勾配で表現できるとき、そのような力を保存力という。さらに、**運動エネルギー**(kinetic energy) K を

$$K = \frac{1}{2} m \left| \frac{d}{dt} \vec{x} \right|^2 = \frac{1}{2} m (u^2 + v^2 + w^2)$$

と定義すると、**力学的エネルギー**(mechanical energy) $E = K + U$ の時間変化は、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E &= \frac{d}{dt} (K + U) = \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m u^2 \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m w^2 \right) \right\} + m g \frac{d}{dt} z \\ &= m u \frac{d}{dt} u + m v \frac{d}{dt} v + m w \frac{d}{dt} w + m g w \\ &= w \left(m \frac{d}{dt} w + m g \right) = 0 \end{aligned}$$

となり、力学的エネルギー E が保存することが確かめられる。一般に、保存力による運動においては、力学的エネルギーは保存する。

以下では $x - z$ 平面において、方程式(1)～(3)の解を解析的に求めてみる。ただし、初期条件は $t = 0$ で

$$u = u_0, \quad w = w_0$$

とする。式(1)より、 u は時間変化しないから、任意の時刻 t において、

$$u = u_0 \tag{4}$$

である。一方、式(3)を時間で積分すると、

$$w = C - g t$$

が得られる。ただし、 C は積分定数である。ここで、初期条件より、

$$C = w_0$$

だから、

$$w = w_0 - g t \tag{5}$$

となる。式(4)、(5)は時刻 t における物体の速度を表している。式(4)、(5)を時間積分すると、

$$x = u_0 t \tag{6}$$

$$z = w_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \tag{7}$$

が得られる。ただし、初期条件として、 $t = 0$ で

$$x = 0, \quad z = 0$$

とした。式(6)、(7)は、物体の軌跡が放物線であることを示している。

問1. (1) 一様な下向きの重力場において、物体を初速 $\vec{u}_0 = (u_0, 0, w_0)$ ($u_0 > 0$, $w_0 > 0$)で投げたときの飛距離を求めよ。ただし重力加速度を g とする。

(2) 初速の大きさが一定のとき、飛距離を最大にするためには、どの角度に向かって物体を投げればよいか。

問2. 一様な下向きの重力場において、質量 m の物体の鉛直方向の運動を考える。水平方向の運動はないものとする。この物体は重力のほかに速さに比例した空気抵抗を受ける。つまり、この物体の運動方程式は

$$m \frac{d}{dt} w = -mg - kw$$

と書ける。 w は鉛直方向の速度、 g は重力加速度であり、 k は空気抵抗の係数である。

(1) 十分に長い時間が経過すると、この物体の鉛直速度 w はある値に収束する。運動方程式に w の時間変化がゼロという条件を与えることによって、その値を求めよ。

(2) この物体の運動の時間変化を求め、鉛直速度 w と鉛直座標 z を時刻 t の関数として表せ。ただし初期条件は原点で静止とする。

4. 2 運動方程式の差分化

式(1)、(3)の解を数値積分(数値シミュレーション)によって求めることを考える。これらの方程式は時間微分を用いて記述されている。時間微分とは、無限に小さい時間間隔における変化の割合のことであるが、計算機によって物理量の時間変化をシミュレーションするときには、有限な大きさの時間間隔における差分に置きかえる必要がある。式(1)、(3)が表す時間微分を差分で表現すると、

$$m \frac{u^+ - u^0}{\Delta t} = 0 \tag{8}$$

$$m \frac{w^+ - w^0}{\Delta t} = -mg \tag{9}$$

と書ける。ただし、 Δt は差分の時間間隔、 f^0 は物理量 f の時刻 t における値、 f^+ は時刻 $t + \Delta t$ における値である。また、

$$\frac{d}{dt} x = u$$

$$\frac{d}{dt}y = v$$

より、

$$\frac{x^+ - x^0}{\Delta t} = u^0 \quad (10)$$

$$\frac{z^+ - z^0}{\Delta t} = w^0 \quad (11)$$

となる。式(8)～(11)において、ある時刻 t における u 、 w 、 x 、 z の値が分かれば、次の時刻 $t + \Delta t$ における u 、 w 、 x 、 z の値を求めることができる。これらの式を変形すると、

$$u^+ = u^0 \quad (12)$$

$$w^+ = w^0 - g\Delta t \quad (13)$$

$$x^+ = x^0 + u^0\Delta t \quad (14)$$

$$z^+ = z^0 + w^0\Delta t \quad (15)$$

が得られる。式(12)～(15)を用いて、初期時刻における u 、 w 、 x 、 z の値から、 u 、 w 、 x 、 z の時間変化を計算することができる。

これらの式においては、時刻 t における時間微分の値を、時刻 t における物理量の値に加えることによって、時刻 $t + \Delta t$ における物理量の値を求めている。つまり、

$$\frac{f^+ - f^0}{\Delta t} = \left(\frac{df}{dt}\right)^0$$

または

$$f^+ = f^0 + \left(\frac{df}{dt}\right)^0 \Delta t$$

としている。このような時間差分の方法を**オイラー法(Euler method)**という。しかし、 $\left(\frac{df}{dt}\right)^0$ は時刻 t における値であるから、本来は、時刻 t から時刻 $t + \Delta t$ における時間変化というよりは、時刻 $t - \Delta t$ から時刻 $t + \Delta t$ における時間変化を代表するものであると考えられる。この点を考慮すると、時間差分を

$$\frac{f^+ - f^-}{2\Delta t} = \left(\frac{df}{dt}\right)^0$$

または

$$f^+ = f^- + 2 \left(\frac{df}{dt} \right)^0 \Delta t$$

と表現したほうが妥当であろう。ただし、 f^- は物理量 f の時刻 $t - \Delta t$ における値である。このような時間差分の方法を**リープフロッグ法**(leap-frog method)という。オイラー法は最も簡単な時間差分法であるが、対象とする物理現象によっては重大な計算誤差を生じることがある。このため、リープフロッグ法が使われることも多い。式(12)～(15)をリープフロッグ法の時間差分に書きかえると、

$$u^+ = u^- \tag{16}$$

$$w^+ = w^- - 2g\Delta t \tag{17}$$

$$x^+ = x^- + 2u^0\Delta t \tag{18}$$

$$z^+ = z^- + 2w^0\Delta t \tag{19}$$

となる。リープフロッグ法では、時刻 $t + \Delta t$ における物理量の値を求めるために、時刻 t における時間微分の値のほかに、時刻 $t - \Delta t$ における物理量の値が必要である。1回目の時間差分の計算のときには、初期時刻よりも時間 Δt だけ前の時刻の物理量の値が必要になるが、実際には得られないことが多い。そのような場合には、1回目の時間差分のみ、オイラー法で計算すればよい。

課題4-1: ① 一様な下向き重力場において、時刻 $t = 0$ における物体の初速度(u_0, w_0)に対して、時刻 t における位置を数値積分によって計算するプログラムを作成せよ。時間差分にはオイラー法またはリープフロッグ法を用いよ。重力加速度 g は $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ とする。数値積分の時間間隔は0.01秒とし、0.01秒ごとに5秒後まで、 x 座標、 z 座標の値をテキストファイルに書き出すようにせよ。また、初速度を $u_0 = 10 \text{ m/s}$ 、 $w_0 = 10 \text{ m/s}$ としたときの物体の軌跡を、gnuplotを用いて、各時刻の位置を結んだ線として作図せよ。

② ①で作成したプログラムを、時刻、 x 座標、 z 座標、水平速度、鉛直速度に加えて、これらの値を用いて評価した単位質量あたりの運動エネルギー K 、ポテンシャルエネルギー U 、力学的エネルギー E も出力するように改良して実行せよ（プログラムや計算結果の提出は不要）。エネルギー保存則に注意しながら、 K 、 U 、 E の時間変化の特徴を述べよ。特に、理論的な予想と異なる点があれば指摘して考察せよ。

①で作成したプログラム (prog04_1.f または prog04_1.c) と結果を作図したもの (fig04_1.ps)、および②の解答（プログラムや計算結果ではなく論述）を記したテキストファイル (answer04_1.txt) を提出せよ。

4. 3 惑星運動の運動方程式

ここでは、原点に存在する質量 M の中心星のまわりを運動する質量 m の惑星の運動を考える ($M \gg m$ とする)。万有引力の法則より、この惑星にはたらく重力の大きさは、 $\frac{GMm}{r^2}$

である。ただし、 G は万有引力定数、 r は中心星と惑星との間の距離である。重力の向きを考慮すると、質量 m の惑星に関する運動方程式は

$$m \frac{d^2}{dt^2} \vec{x} = -\frac{GMm}{|\vec{x}|^2} \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}$$

と書ける。ただし、 $\vec{x} = (x, y, z)$ は惑星の位置ベクトルである。この運動方程式は、ポテンシャル $U = -\frac{GMm}{|\vec{x}|}$ を用いて、

$$m \frac{d^2}{dt^2} \vec{x} = -\nabla U$$

と表すこともできる。直交座標系において運動方程式の各成分を書き出すと、

$$m \frac{d}{dt} u = -\frac{GMm}{|\vec{x}|^2} \frac{x}{|\vec{x}|} \quad (20)$$

$$m \frac{d}{dt} v = -\frac{GMm}{|\vec{x}|^2} \frac{y}{|\vec{x}|} \quad (21)$$

$$m \frac{d}{dt} w = -\frac{GMm}{|\vec{x}|^2} \frac{z}{|\vec{x}|} \quad (22)$$

となる。

4. 4 惑星運動の性質

ここで、中心星を原点とする x - y 平面内での運動を考えて、 $z = 0$ 、 $w = 0$ とする。極座標を用いて、

$$x = r \cos \theta \quad (23)$$

$$y = r \sin \theta \quad (24)$$

とすると、

$$u = \dot{x} = \dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta \quad (25)$$

$$v = \dot{y} = \dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta \quad (26)$$

$$\dot{u} = \ddot{x} = \ddot{r} \cos \theta - 2\dot{r}\dot{\theta} \sin \theta - r\ddot{\theta} \sin \theta - r\dot{\theta}^2 \cos \theta \quad (27)$$

$$\dot{v} = \ddot{y} = \ddot{r} \sin \theta + 2\dot{r}\dot{\theta} \cos \theta + r\ddot{\theta} \cos \theta - r\dot{\theta}^2 \sin \theta \quad (28)$$

だから、運動方程式は、

$$\ddot{r} \cos \theta - 2\dot{r}\dot{\theta} \sin \theta - r\ddot{\theta} \sin \theta - r\dot{\theta}^2 \cos \theta = -\frac{GM}{r^2} \cos \theta \quad (29)$$

$$\ddot{r} \sin \theta + 2\dot{r}\dot{\theta} \cos \theta + r\ddot{\theta} \cos \theta - r\dot{\theta}^2 \sin \theta = -\frac{GM}{r^2} \sin \theta \quad (30)$$

(29) に $\cos \theta$ を、(30) に $\sin \theta$ をかけて和を計算すると、

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{GM}{r^2} \quad (31)$$

が得られる。同様に、(29) に $\sin \theta$ を、(30) に $\cos \theta$ をかけて差を計算すると、

$$2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 0 \quad (32)$$

が得られる。(32) に r をかけると、

$$2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta} = 0 \quad (33)$$

だから、

$$\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0 \quad (34)$$

が得られる。(34) は単位質量あたりの角運動量

$$L = r^2\dot{\theta} \quad (35)$$

が時間変化しないことを示している。(35) を (31) に代入すると、

$$\ddot{r} - \frac{L^2}{r^3} + \frac{GM}{r^2} = 0 \quad (36)$$

となる。(36) に \dot{r} をかけると、

$$\dot{r}\ddot{r} - \frac{L^2}{r^3}\dot{r} + \frac{GM}{r^2}\dot{r} = 0 \quad (37)$$

だから、

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2r^2} - \frac{GM}{r}\right) = 0 \quad (38)$$

が得られる。(38) は単位質量あたりの力学的エネルギー

$$E = \frac{1}{2}\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2r^2} - \frac{GM}{r} \quad (39)$$

が時間変化しないことを示している。(39) で、

$$U_e(r) = \frac{L^2}{2r^2} - \frac{GM}{r} \quad (40)$$

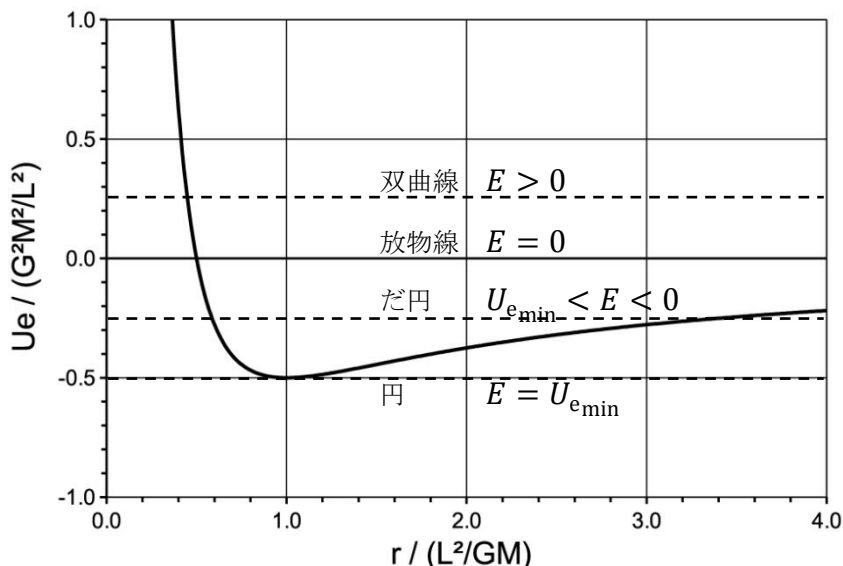
を**有効ポテンシャル**(effective potential energy)という。つねに、

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 = E - U_e(r) \geq 0 \quad (41)$$

でなければならないので、惑星が持つ力学的エネルギー E と角運動量 L が与えられると、中心星からの距離 r がとることのできる値の範囲が決まる。

力学的エネルギー E が U_e の最小値 $U_{e\min}$ に等しいとき、 r は一定である。これは円運動を意味している。また、 $U_{e\min} < E < 0$ のとき、 r の最小値と最大値が存在し、惑星はだ円

運動をする。一方、 $0 \leq E$ のときは、 r の最小値は存在するが、最大値は存在せず無限に大きい値をとる。これは放物線運動 ($E = 0$) や双曲線運動 ($E > 0$) を表している。



問3. (1) 惑星運動における有効ポテンシャルは、 $U_e(r) = \frac{L^2}{2r^2} - \frac{GM}{r}$ と書ける。ただし、 r は中心星からの距離、 L は惑星の単位質量あたりの角運動量、 M は中心星の質量であり、 G は万有引力定数である。 $U_e(r)$ の最小値 $U_{e_{\min}}$ と、そのときの r の値を求めよ。

(2) (1) で求めた r の値は、惑星が円軌道を描いて公転する場合の中心星からの距離を表している。この r の値と、角運動量 L の定義から、円軌道の場合の公転速度 v_1 を G 、 M 、 r を用いて表せ。

(3) 角運動量 L の定義から、円軌道の場合について、公転周期 T を L 、 r を用いて表せ。

(4) (1) で求めた r の値の式と (3) の結果から L を消去することによって、円軌道の場合について、中心星からの距離 r と公転周期 T との関係を求めよ。これは、円軌道の場合についてのケプラーの第3法則である。

問4. 惑星の単位質量あたりの力学的エネルギーは $E = \frac{1}{2}\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2r^2} - \frac{GM}{r}$ と書ける。ただし、 r は中心星からの距離、 L は惑星の単位質量あたりの角運動量、 M は中心星の質量であり、 G は万有引力定数である。惑星の描く軌道が放物線のとき、つまり $E = 0$ のとき、惑星が中心星に最も接近したときの運動の速さ v_2 を G 、 M 、 r を用いて表せ。

4. 5 惑星運動のシミュレーション

ここでは、運動方程式 (20)、(21) の解を数値積分によって求めてみる。(20)、(21) をリープフロッグ法の時間差分に書きかえると、

$$u^+ = u^- - 2GM \frac{x^0}{\{(x^0)^2 + (y^0)^2\}^{3/2}} \Delta t \quad (42)$$

$$v^+ = v^- - 2GM \frac{y^0}{\{(x^0)^2 + (y^0)^2\}^{3/2}} \Delta t \quad (43)$$

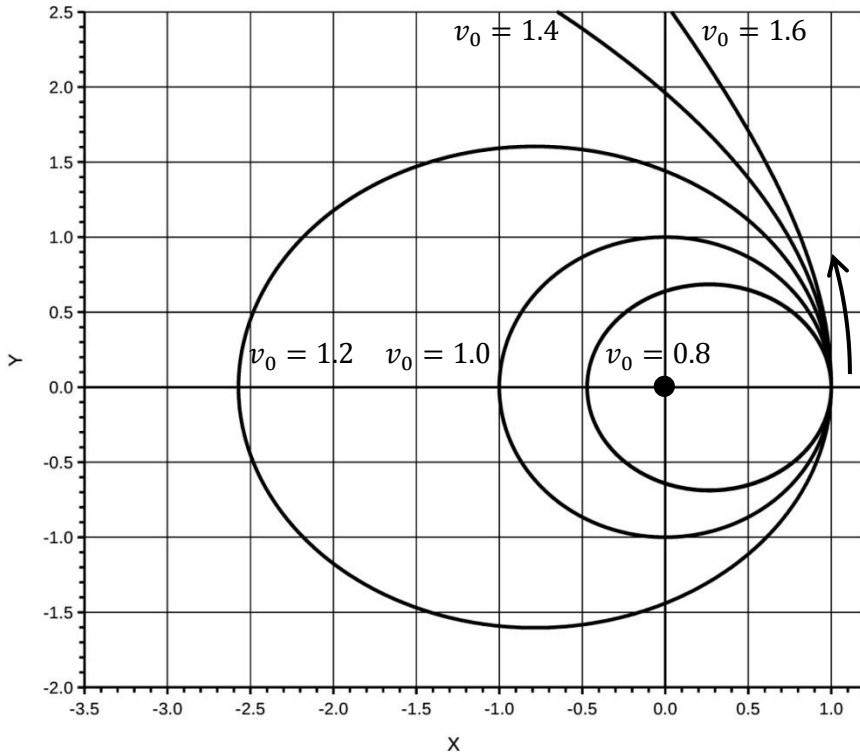
となる。また、式(18)、(19)と同様に、

$$x^+ = x^- + 2u^0 \Delta t \quad (44)$$

$$y^+ = y^- + 2v^0 \Delta t \quad (45)$$

である。式(42)～(45)を用いると、初期時刻における u 、 v 、 x 、 y の値から、それらの変数の時間変化を計算することができる。

例：簡単のため、質量 M と万有引力定数 G を規格化し、 $M = 1$ 、 $G = 1$ とする。中心星を原点とする x - y 平面内での運動を考えるものとし、初期条件は、 $u = 0$ 、 $v = v_0$ 、 $x = 1$ 、 $y = 0$ とする。 $v_0 = 0.8, 1.0, 1.2, 1.4, 1.6$ としたときの惑星の軌跡を図示すると図のようになる。



一般には、 $v_0 = 1$ のときは円、 $v_0 < 1$ または $1 < v_0 < \sqrt{2}$ のときはだ円、 $v_0 = \sqrt{2}$ のときは放物線、 $\sqrt{2} < v_0$ のときは双曲線になる。

なお、天体の軌道計算を数値積分によって計算するときには、高い計算精度が要求されるため、リーブフロッグ法よりも高度なルンゲ・クッタ法が用いられることが多い。

課題 4-2 : ① 原点に存在する質量 M の中心星のまわりを運動する質量 m の惑星の運動を数値積分によって計算するプログラムを作成せよ。(prog04_2.f または prog04_2.c)。時間差分にはリープフロッグ法を用いよ(1 回目の時間差分はオイラー法でよい)。簡単のため、中心星の質量 M と万有引力定数 G を規格化し、 $M = 1$ 、 $G = 1$ とする。中心星を原点とする $x-y$ 平面内での運動を考えるものとし、初期条件は、 $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ 、 $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0$ 、 $x = 1$ 、 $y = 0$ とする。 \mathbf{v}_0 は標準入力から与えるものとする。数値積分の時間間隔は 0.01 とし、各時刻の x 座標、 y 座標の値をテキストファイルに書き出すようにせよ。また、初速度を $v_0 = 0.8$ 、1.0、1.2、1.4、1.6 としたときの結果を gnuplot で作図せよ (fig04_2.ps)。gnuplot で set square (または set size ratio 1) とすると、縦と横の縮尺を統一することができる。また、set grid とすると、目盛線が入り軌道の形を定量的に比較しやすくなる。

② ①で作成したプログラムを、時刻、 x 座標、 y 座標に加えて、運動エネルギー K 、ポテンシャルエネルギー U 、力学的エネルギー E 、角運動量 L を評価して出力するように改良して実行せよ (プログラムや計算結果の提出は不要)。エネルギー保存則と角運動量保存則に注意しながら、 K 、 U 、 E 、 L の時間変化の特徴を述べよ。特に、理論的な予想と異なる点があれば指摘して考察せよ。

①で作成したプログラム (prog04_2.f または prog04_2.c) と結果を作図したもの (fig04_2.ps)、および②の解答を記したテキストファイル (answer04_2.txt) を提出せよ。

(参考) 軌道の形の求め方

(35) より、

$$\dot{\theta} = \frac{L}{r^2} \quad (46)$$

(39) より、

$$\dot{r} = \pm \sqrt{2E + \frac{2GM}{r} - \frac{L^2}{r^2}} \quad (47)$$

ここで、 $\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt}$ だから、

$$\frac{L}{r^2} \frac{dr}{d\theta} = \pm \sqrt{2E + \frac{2GM}{r} - \frac{L^2}{r^2}} \quad (48)$$

補助変数 s を $s = \frac{1}{r}$ と定義すると、 $ds = -\frac{1}{r^2} dr$ だから、

$$-L \frac{ds}{d\theta} = \pm \sqrt{2E + 2GMs - L^2 s^2}$$

$$\frac{ds}{d\theta} = \mp \sqrt{\frac{2E}{L^2} + \frac{2GM}{L^2}s - s^2}$$

$$\frac{ds}{d\theta} = \mp \sqrt{\frac{2E}{L^2} + \frac{G^2M^2}{L^4} - \left(s - \frac{GM}{L^2}\right)^2} \quad (49)$$

(49) の解は、

$$s = \frac{GM}{L^2} + \sqrt{\frac{2E}{L^2} + \frac{G^2M^2}{L^4}} \sin\theta \quad (50)$$

と書くことができる。 $e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{G^2M^2}}$ とおくと、

$$s = \frac{GM}{L^2} (1 + e \sin\theta) \quad (51)$$

となって、

$$r = \frac{L^2}{GM} \frac{1}{1 + e \sin\theta} \quad (52)$$

が得られる。この式は、中心星からみた方位と距離の関係式であり、軌道の形を表している。 e を離心率という。(52)は二次曲線の極座標表示であり、 $e = 0$ のときは円、 $0 < e < 1$ のときはだ円、 $e = 1$ のときは放物線、 $e > 1$ のときは双曲線を表す。