５　荷電粒子の運動

電磁場中の荷電粒子は、ローレンツ力を受ける。そこで、一様な電磁場中での荷電粒子の運動に関する運動方程式を導出し、数値シミュレーションによって粒子の運動を計算してみる。

５．１　荷電粒子の運動方程式

一般に荷電粒子は電磁場から力を受ける。質量mの粒子に作用する力を$\vec{F}$とすると運動方程式は、

$$m\frac{d^2}{dt^2}\vec{x} = \vec{F}$$

と書ける。ただし、$\vec{x} = (x, y, z)$は物体の位置ベクトルである。電磁場中の荷電粒子を考えると、力$\vec{F}$は、

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \frac{d}{dt}\vec{x} \times \vec{B}\right)$$

である。ただし、qは荷電粒子が持つ電荷であり、$\vec{E}$は電場、$\vec{B}$は磁場（磁束密度）である。この$\vec{F}$は**ローレンツ力**(Lorentz force)とよばれる。このとき、荷電粒子の運動方程式は、

$$m\frac{d^2}{dt^2}\vec{x} = q\left(\vec{E} + \frac{d}{dt}\vec{x} \times \vec{B}\right)$$

と書ける。直交座標系において運動方程式の各成分を書き出すと、

$$m\frac{d}{dt}u = q(E_{\mathrm{x}} + vB_{\mathrm{z}} - wB_{\mathrm{y}}) \tag{1}$$

$$m\frac{d}{dt}v = q(E_{\mathrm{y}} + wB_{\mathrm{x}} - uB_{\mathrm{z}}) \tag{2}$$

$$m\frac{d}{dt}w = q(E_{\mathrm{z}} + uB_{\mathrm{y}} - vB_{\mathrm{x}}) \tag{3}$$

となる。

問１． 次のような静電場または静磁場において、正電荷をもつ荷電粒子（質量m、電荷q）の運動を求めよ。まず、時刻tにおける速度u、v、wをtの関数として表せ。次に、時刻tにおける位置x、y、zをtの関数として求め、軌跡の概形を図示せよ。

（１）　電場は$\vec{E} = (0, E, 0)\ (E > 0)$で、磁場はない。初期条件は$t = 0$で

$\frac{d}{dt}\vec{x} = (u_0, 0, 0)\ (u_0 > 0)$、$\vec{x} = (0, 0, 0)$。

（２）　磁場（磁束密度）は$\vec{B} = (0, 0, B)\ (B > 0)$で、電場はない。初期条件は$t = 0$で

$\frac{d}{dt}\vec{x} = (0,\ v_0, 0)\ (v_0 > 0)$、$\vec{x} = (0, 0, 0)$。

５．２　一様な電磁場中での荷電粒子の運動

ここでは、時間変化をしない、空間的に一様な電磁場中での荷電粒子の運動を考えてみる。電場を$\vec{E} = (0, E, 0)$、磁場（磁束密度）を$\vec{B} = (0, 0, B)\ (B \neq 0)$とする。荷電粒子の運動方程式の$x$成分と$y$成分は、

$$m\frac{d}{dt}u = qvB \tag{4}$$

$$m\frac{d}{dt}v = q(E - uB) \tag{5}$$

と書ける。ここで、$\frac{d}{dt}\vec{x} = (u, v, w)$である。ただし、初期条件は$t = 0$で静止、つまり、

$$u = 0, \qquad v = 0$$

とする。これらの方程式の解を解析的に求めてみる。式（５）を時間で微分すると、

$$m\frac{d^2}{dt^2}v = -qB\frac{d}{dt}u$$

となり、これを式（４）に代入して、

$$m^2\frac{d^2}{dt^2}v = -q^2B^2v$$

が得られる。この方程式の解のうち、vについての初期条件$t = 0$で$v = 0$をみたすものは、

$$v = C\sin\left(\frac{qB}{m}t\right)$$

である。ただし、Cは定数である。この解を（５）に代入すると、

$$qBC\cos\left(\frac{qB}{m}t\right) = q(E - uB)$$

となり、

$$u = \frac{E}{B} - C\cos\left(\frac{qB}{m}t\right)$$

が得られる。ここで、uについての初期条件$t = 0$で$u = 0$より、

$$C = \frac{E}{B}$$

である。したがって、

$$u = \frac{E}{B}\left\{1 - \cos\left(\frac{qB}{m}t\right)\right\}$$

$$v = \frac{E}{B}\sin\left(\frac{qB}{m}t\right)$$

となる。

なお、空気塊に気圧傾度力とコリオリ力がはたらく場合の運動方程式は、(4)、(5)と同様の形で表される。実際に、気圧傾度力を$-\nabla p = \left(0,\ -P_{\mathrm{y}}, 0\right)\left(P_{\mathrm{y}} > 0\right)$、コリオリ係数を$f\ (> 0)$とすると、空気塊の運動方程式の$x$成分と$y$成分は、

$$\frac{d}{dt}u = f\,v$$

$$\frac{d}{dt}v = -f\,u + \frac{1}{\rho}P_{\mathrm{y}}$$

と書ける。摩擦がはたらかない理想的な条件では、気圧傾度力とコリオリ力によって空気塊が荷電粒子と同様の運動をすることを示している。

問２．$E > 0$、$B > 0$という条件のもとで、上で求めた荷電粒子の軌跡を図示せよ。ただし、$t = 0$で$\vec{x} = (0, 0, 0)$とする。なお、このような図形をサイクロイドという。

問３．上で求めた荷電粒子について、$E > 0$、$B > 0$という条件のもとで、十分に長い時間で平均した粒子の速度を求めよ。

５．３　運動方程式の差分化

式（４）、（５）の解を数値シミュレーションによって求めることを考える。式（４）、（５）が表す時間微分を時間差分（リープフロッグ法）で表現すると、

$$u^{+} = u^{-} + 2\frac{qB}{m}v^{0}\Delta t \tag{6}$$

$$v^{+} = v^{-} + 2\frac{q}{m}(E - Bu^{0})\Delta t \tag{7}$$

と書ける。ただし、Δtは差分の時間間隔、f^{-}、f^{0}、f^{+}はそれぞれ物理量fの時刻$t - \Delta t$、t、$t + \Delta t$における値である。また、

$$\frac{d}{dt}x = u$$

$$\frac{d}{dt}y = v$$

より、

$$x^{+} = x^{-} + 2u^{0}\Delta t \tag{8}$$

$$y^{+} = y^{-} + 2v^{0}\Delta t \tag{9}$$

となる。式（６）～（９）を用いると、初期時刻におけるu、v、x、yの値から、これらの変数の時間変化を計算することができる。

課題５：時間変化をしない、空間的に一様な電磁場を考え、電場を$\vec{E} = (0, E, 0)$、磁場（磁束密度）を$\vec{B} = (0, 0, B)$とする。このような電磁場において、荷電粒子（質量m、電荷q）の、

時刻tにおける位置を数値積分によって計算するプログラムを作成せよ（prog05.f または prog05.c）。時間差分にはリープフロッグ法を用いよ。簡単のため、質量、電荷、電場、磁束密度を規格化し、$m = 1$、$q = 1$、$E = 1$、$B = 1$とする。z軸方向の運動はないものとし、$x-y$平面内の運動のみを計算すればよい。初期の位置は原点とする。初速度$(u_0,\ v_0)$は標準入力から与えるものとする。数値積分の時間間隔には十分に小さい値を設定し、各時刻のx座標、y座標の値をテキストファイルに書き出すようにせよ。また、初速度を$u_0 = v_0 = 0$としたときの結果を gnuplot で作図せよ（fig05.ps）。

作成したプログラム（prog05.f または prog05.c）と結果を作図したもの（fig05.ps）を提出せよ。