数値計算セミナー

1　渦度の解析

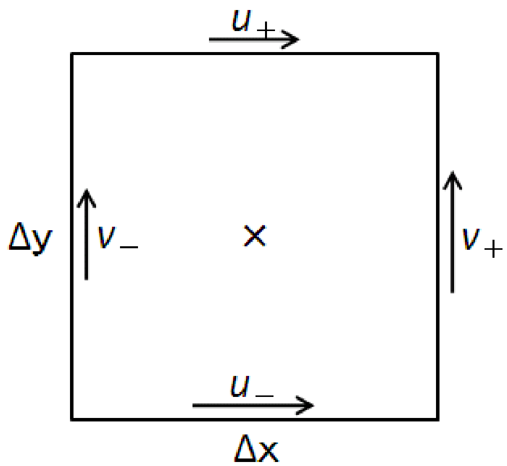
緯度経度座標で格子が定義されている客観解析データを用いて、渦度を計算することを考える。

ｘ－ｙ平面上においては、水平風速場$\vec{u} = (u, v)$に対して、相対渦度ξは

$$\xi = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \tag{1}$$

と書けた。これは、ｘ軸とｙ軸が直線であって互いに直交しているｘ－ｙ平面上での定義である。全球客観解析データのような球面座標で定義された格子点データにおいては、座標を緯度、経度で定義するので、この定義をそのまま用いて渦度を計算することはできない。

そこで、渦度を座標系によらずに定義する方法を検討する。図のように、ｘ－ｙ平面上の微小な領域$\Delta x \Delta y$において渦度を計算することを考えてみる。



上の渦度の定義式を、微小な領域$\Delta x \Delta y$における差分に置き換えると、

$$\xi = \frac{v_+ - v_-}{\Delta x} - \frac{u_+ - u_-}{\Delta y} \tag{2}$$

となる。ここで、両辺に$\Delta x \Delta y$をかけると、

$$\xi \Delta x \Delta y = (v_+ - v_-)\Delta y - (u_+ - u_-)\Delta x \tag{3}$$

となるので、右辺のカッコを展開して並べかえると、

$$\xi \Delta x \Delta y = v_+ \Delta y + u_+(-\Delta x) + v_-(-\Delta y) + u_- \Delta x \tag{4}$$

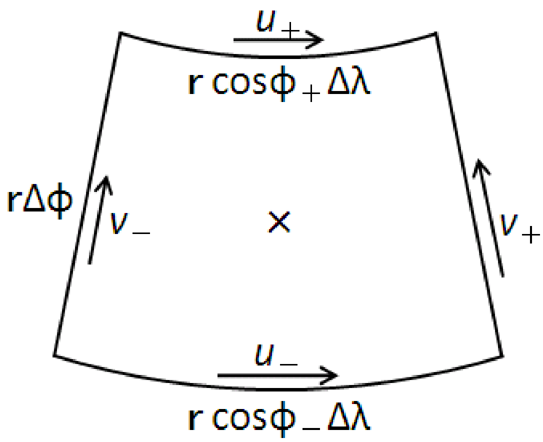
のように書くことができる。左辺は渦度と面積との積である。一方、右辺は領域の境界の接線ベクトルと風速ベクトルとの内積を、境界を一周して合計したものである。たとえば、右辺第１項は、領域の右端における接線ベクトル(0,1)とその場所での風速ベクトルとの内

積を長さΔyにわたって積分したものである。ここでは反時計回りに一周しながら積分するので、領域の上端と左端では符号が反転する点に注意する。以上は、ｘ－ｙ平面上での微小な矩形領域における議論である。しかし、任意の形状で有限な面積をもつ領域の場合であっても、微小な矩形領域の足し合わせであるとみなして、同様の議論をすることができる。このような場合、積分を用いて、一般に、

$$\iint \xi dxdy = \oint \vec{u}\, d\vec{l} \tag{5}$$

と表すことができる。右辺は領域の境界に沿った周回微分であり、$d\vec{l}$は接線ベクトルである。これを**ストークスの定理**という。ストークスの定理を用いると、渦度を、領域の境界の接線と風速ベクトルとの内積の積算として表せるので、座標系によらずに定義することができる。

ここで、ストークスの定理を用いて、緯度ϕと経度λで座標が定義されている、半径rの球面上での渦度を考える。



図のような球面上の微小な領域$r^2\Delta\phi\Delta\lambda$においてストークスの定理を適用すると、

$$\xi r^2 \cos\phi\Delta\phi\Delta\lambda = v_+(r\Delta\phi) + u_+(-r\cos\phi_+\Delta\lambda) + v_-(-r\Delta\phi) + u_-(r\cos\phi_-\Delta\lambda) \tag{6}$$

となるので、右辺を整理すると、

$$\xi r^2 \cos\phi\Delta\phi\Delta\lambda = (v_+ - v_-)(r\Delta\phi) - (u_+\cos\phi_+ - u_-\cos\phi_-)(r\Delta\lambda) \tag{7}$$

が得られる。両辺を$r^2\cos\phi\Delta\phi\Delta\lambda$で割ると、

$$\xi = \frac{v_+ - v_-}{r\cos\phi\Delta\lambda} - \frac{u_+\cos\phi_+ - u_-\cos\phi_-}{r\cos\phi\Delta\phi} \tag{8}$$

となる。微分を用いれば、

$$\xi = \frac{1}{r\cos\phi}\frac{\partial v}{\partial\lambda} - \frac{1}{r\cos\phi}\frac{\partial(u\cos\phi)}{\partial\phi} \tag{9}$$

と書ける。これが球面座標系における（相対）渦度である。なお、絶対渦度ζは、

$$\zeta = f + \xi \tag{10}$$

と書ける。ただし、fはコリオリ係数であり、

$$f = 2\Omega\sin\phi \tag{11}$$

である。

課題１：①客観解析データを用いて、2011 年 4 月 22 日 0 時（UTC）と 24 日 0 時（UTC）における海面気圧と 500hPa 面高度を求めよ。

②客観解析データを用いて、2011 年 4 月 22 日 0 時（UTC）と 24 日 0 時（UTC）における 500hPa 面における相対渦度、絶対渦度を計算せよ。相対渦度と絶対渦度については、東西風と南北風から計算せよ。

絶対渦度の計算に用いたプログラム（prog01.f[.c]）と、それぞれの時刻における海面気圧（SLP1.ps と SLP2.ps)、500hPa 面高度（Z5001.ps と Z5002.ps)、500hPa 面相対渦度（XI5001.ps と XI5002.ps)、500hPa 面絶対渦度（ZT5001.ps と ZT5002.ps）を作図した図を提出せよ。なお、作図する領域は北緯 20～60 度、東経 90～180 度とする。

注意：与えられた客観解析データにおいては、格子間隔は東西、南北とも 2.5 度である。南北方向の格子点番号は北極から南極に向けて振られている。東西、南北差分を計算するときには、領域の端での取り扱いに注意を払う必要がある。入力データに欠損はないと思われるが、出力データにおいて領域の端を欠損とするのであれば、欠損値を代入しておく必要がある。

※この演習では NCEP/NCAR（米国環境予測センター/米国大気研究センター）による客観解析データを用いています。