

数値解析で学ぶ気象学

1 渦度の解析

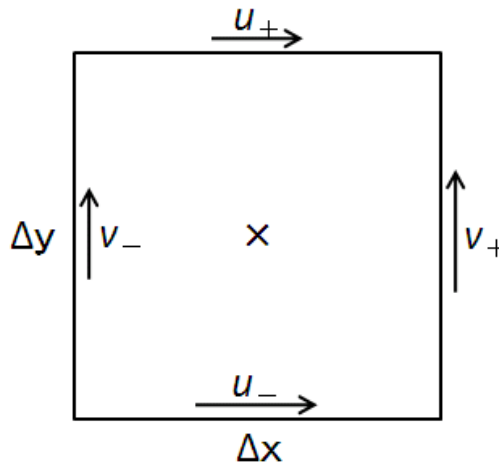
緯度経度座標で格子が定義されている客観解析データを用いて、**渦度(vorticity)**を計算することを考える。

$x - y$ 平面上においては、水平風速場 $\vec{u} = (u, v)$ に対して、相対渦度 ξ は

$$\xi = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (1)$$

と書けた。これは、 x 軸と y 軸が直線であって互いに直交している $x - y$ 平面上での定義である。全球客観解析データのような球面座標で定義された格子点データにおいては、座標を緯度、経度で定義するので、この定義をそのまま用いて渦度を計算することはできない。

そこで、渦度を座標系によらずに定義する方法を検討する。図のように、 $x - y$ 平面上の微小な領域 $\Delta x \Delta y$ において渦度を計算することを考えてみる。



上の渦度の定義式を、微小な領域 $\Delta x \Delta y$ における差分に置き換えると、

$$\xi = \frac{v_+ - v_-}{\Delta x} - \frac{u_+ - u_-}{\Delta y} \quad (2)$$

となる。ここで、両辺に $\Delta x \Delta y$ をかけると、

$$\xi \Delta x \Delta y = (v_+ - v_-) \Delta y - (u_+ - u_-) \Delta x \quad (3)$$

となるので、右辺のカッコを展開して並べかえると、

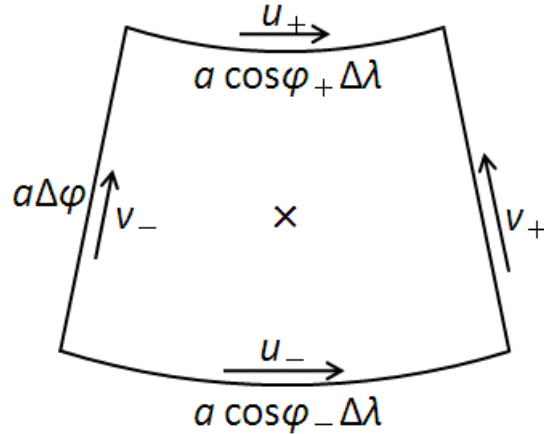
$$\xi \Delta x \Delta y = v_+ \Delta y + u_+ (-\Delta x) + v_- (-\Delta y) + u_- \Delta x \quad (4)$$

のように書くことができる。左辺は渦度と面積との積である。一方、右辺は領域の境界の接線ベクトルと風速ベクトルとの内積を、境界を一周して合計したものである。たとえば、右辺第1項は、領域の右端における接線ベクトル $(0, 1)$ とその場所での風速ベクトルとの内積を長さ Δy にわたって積分したものである。ここでは反時計回りに一周しながら積分するので、領域の上端と左端では符号が反転する点に注意する。以上は、 $x - y$ 平面上での微小な矩形領域における議論である。しかし、任意の形状で有限な面積をもつ領域の場合であっても、微小な矩形領域の足し合わせであるとみなして、同様の議論をすることができる。このような場合、積分を用いて、一般に、

$$\iint \xi dx dy = \oint \vec{u} \cdot d\vec{l} \quad (5)$$

と表すことができる。右辺は領域の境界に沿った周回積分であり、 $d\vec{l}$ は接線ベクトルである。これを **ストークスの定理(Stokes' theorem)** という。ストークスの定理を用いると、渦度を、領域の境界の接線と風速ベクトルとの内積の積算として表せるので、座標系によらずに定義することができる。

ここで、ストークスの定理を用いて、緯度 ϕ と経度 λ で座標が定義されている、半径 a の球面上での渦度を考える。



図のような球面上の微小な領域 $a^2 \cos\phi \Delta\phi \Delta\lambda$ においてストークスの定理を適用すると、

$$\xi a^2 \cos\phi \Delta\phi \Delta\lambda = v_+(a\Delta\phi) + u_+(-a \cos\phi_+ \Delta\lambda) + v_-(-a\Delta\phi) + u_-(a \cos\phi_- \Delta\lambda) \quad (6)$$

となるので、右边を整理すると、

$$\xi a^2 \cos\phi \Delta\phi \Delta\lambda = (v_+ - v_-)(a\Delta\phi) - (u_+ \cos\phi_+ - u_- \cos\phi_-)(a\Delta\lambda) \quad (7)$$

が得られる。両辺を $a^2 \cos\phi \Delta\phi \Delta\lambda$ で割ると、

$$\xi = \frac{v_+ - v_-}{a \cos\phi \Delta\lambda} - \frac{u_+ \cos\phi_+ - u_- \cos\phi_-}{a \cos\phi \Delta\phi} \quad (8)$$

となる。微分を用いれば、

$$\xi = \frac{1}{a \cos\phi} \frac{\partial v}{\partial \lambda} - \frac{1}{a \cos\phi} \frac{\partial(u \cos\phi)}{\partial \phi} \quad (9)$$

と書ける。これが球面座標系における**相対渦度**(relative vorticity)である。なお、**絶対渦度**(absolute vorticity) ζ は、

$$\zeta = f + \xi \quad (10)$$

と書ける。ただし、 f はコリオリ係数であり、

$$f = 2\Omega \sin\phi \quad (11)$$

である。

課題3 : SLP_201104.dat、Z500_201104.dat、U500_201104.dat、V500_201104.dat はそれぞれ、2011年4月の各時刻における海面気圧、500hPa面高度、500hPa面東西風、500hPa面南北風の客観解析データである。データファイルの書式は、対応するコントロールファイルに記述されている。これらのデータを用いて以下の問いに答えよ。

①2011年4月22日0時(UTC)と24日0時(UTC)における海面気圧と500hPa面高度を求めよ。

②2011年4月22日0時(UTC)と24日0時(UTC)における500hPa面での相対渦度、絶対渦度を計算せよ。相対渦度と絶対渦度については、東西風と南北風から計算せよ。地球の半径は $a = 6.368 \times 10^6$ m、自転角速度は $\Omega = 7.29 \times 10^{-5}$ /sとする。

絶対渦度の計算に用いたプログラム(prog03.f[c])と、それぞれの時刻における海面気圧(SLP1.psとSLP2.ps)、500hPa面高度(Z5001.psとZ5002.ps)、500hPa面相対渦度(xi5001.psとxi5002.ps)、500hPa面絶対渦度(zt5001.psとzt5002.ps)を作図した図を提出せよ。なお、作図する領域は、緯度経度座標で北緯20~60度、東経90~180度とする。

注意：

- ✓ 与えられた客観解析データにおいては、格子間隔は東西、南北とも 2.5 度である。また、数式に代入するときはラジアンに変換する必要がある。
- ✓ 東西風 u の南北微分は、 u_+ を求める格子点と u_- を求める格子点が格子 2 個分離れているので、分母に出てくる緯度間隔の値 $\Delta\phi$ は 2.5 度ではなく 5 度に相当する値にする必要がある。南北風 v の東西微分も同様である。
- ✓ 南北方向の格子点番号は北極から南極に向けて振られている。
- ✓ 東西、南北差分を計算するときには、領域の端での取り扱いに注意を払う必要がある。
- ✓ 入力データに欠損はないと思われるが、出力データにおいて領域の端で欠損とするのであれば、欠損値を代入しておく必要がある。

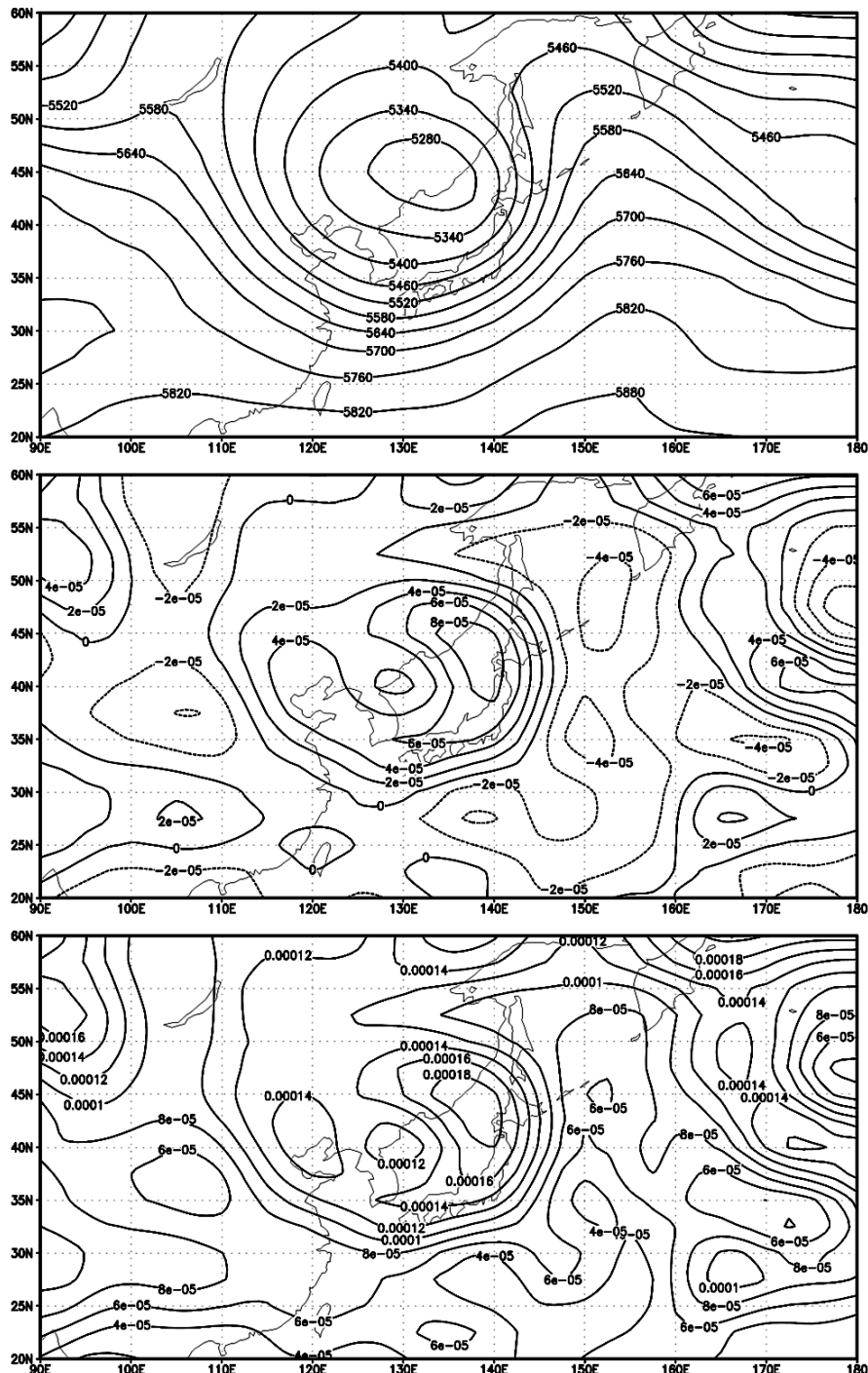


図 3.1 2011 年 4 月 24 日 0 時 (UTC) における 500hPa 高度 (上) と相対渦度 (中)、絶対渦度 (下)。等値線間隔はそれぞれ 60 m と $2 \times 10^{-5} /s$ 、 $2 \times 10^{-5} /s$ 。

※この演習では NCEP/NCAR (米国環境予測センター/米国大気研究センター) による客観解析データを用い

ている。