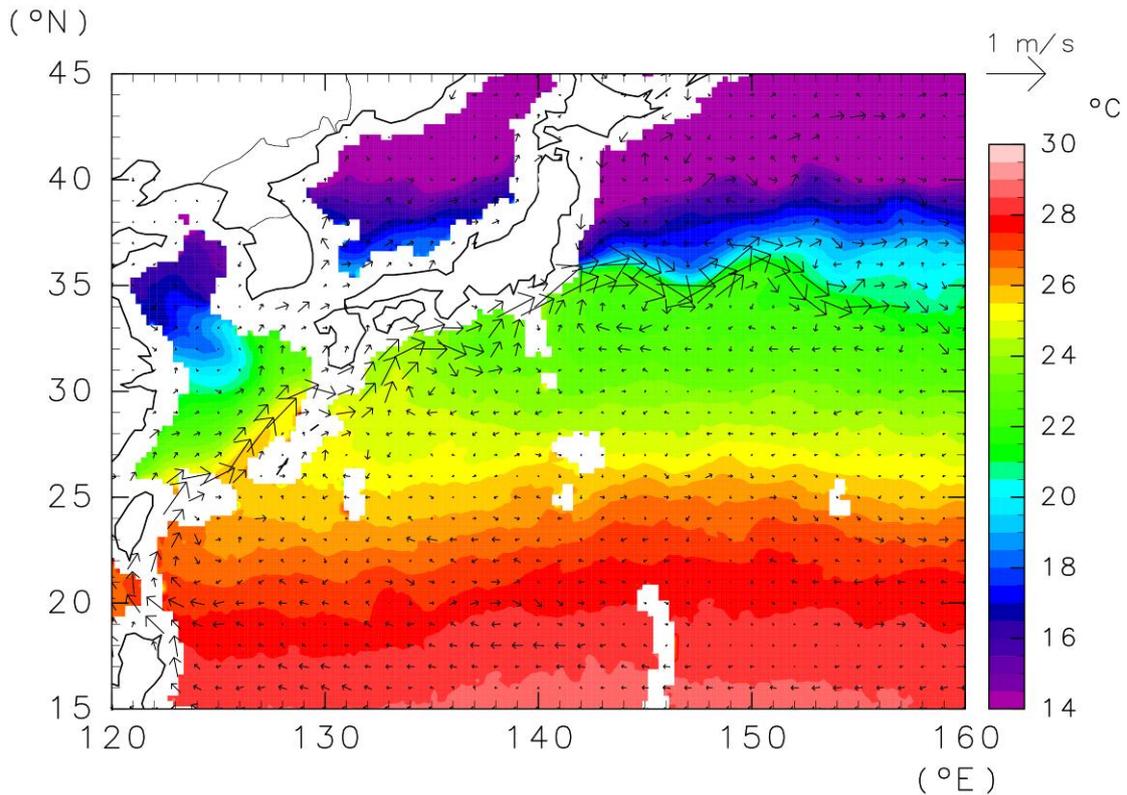


## 5 西岸境界流

黒潮や親潮に代表されるような海流を考える。このような海洋の運動においては、鉛直運動よりも水平方向の運動のほうがずっと大きい。しかも、水平方向の運動の中でも、収束、発散成分は相対的に小さく、渦、つまり回転成分のほうが卓越している。そこで、回転成分に着目して海洋の運動を論じる。

### 5.1 黒潮の概観

**黒潮**(Kuroshio Current)は日本の本州南岸を東向きに流れる海流である。水温の高い海水をもたらす暖流として知られる。黒潮の流速は 1 m/s を超えることがあり、世界的に見ても最も顕著な海流のひとつである。



(Aviso データと AMSR データより作成)  
日本付近の海流と海面水温 (2004 年の平均)

日本付近では、黒潮のほかに、**親潮**(Oyashio Current)、対馬海流、リマン海流などが知られているが、図をみると、これらの海流と比べて、黒潮が卓越した

海流であることがわかる。黒潮は房総半島沖で離岸して東向きに流れていくが、この部分を**黒潮続流(Kuroshio Extension)**という。黒潮／黒潮続流とその南側の海域での海流は、全体的にみると時計回りに循環している。これを**亜熱帯循環(subtropical gyre)**という。一方、黒潮／黒潮続流の北側の海域に注目すると、親潮を含めて、全体的に反時計回りに循環している。これを**亜寒帯循環(subpolar gyre)**という。

海流は通常、地球の自転周期程度の短い時間スケールではほぼ一定とみなすことができ、**地衡流平衡(geostrophic balance)** (気象学における地衡風平衡と同じ) が成り立っている。地衡流平衡とは、圧力傾度力とコリオリ力とのつり合いである。以下では、海洋の運動方程式において、地衡流平衡の関係を導出する。海洋の水平方向の運動を記述する運動方程式は、水平流速を  $(u, v)$ 、海面高度を  $h$  とすると、気象学の場合と同様に、

$$\frac{D}{Dt} u = fv - g \frac{\partial}{\partial x} h + F_x \quad (x)$$

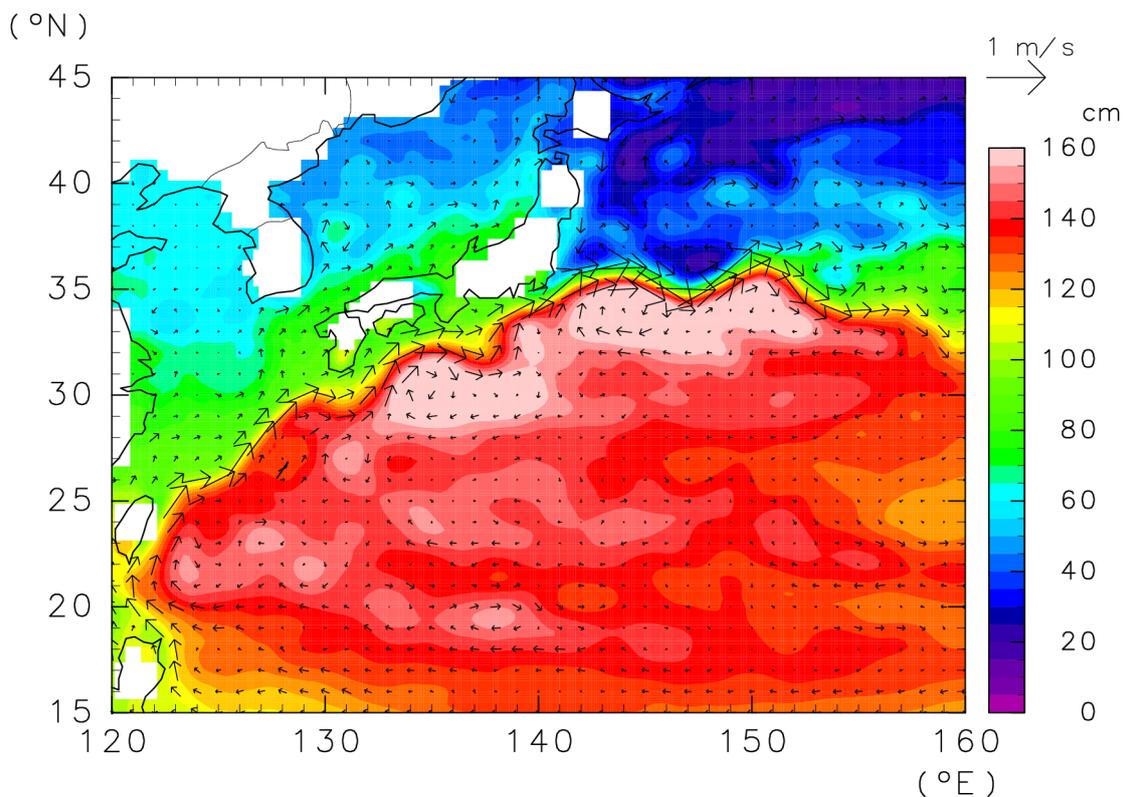
$$\frac{D}{Dt} v = -fu - g \frac{\partial}{\partial y} h + F_y \quad (x)$$

と書ける。ただし、 $f$  はコリオリ係数、 $g$  は重力加速度である。流速の時間微分 (ラグランジュ微分) と粘性の効果をゼロとすると、水平流速  $(u, v)$ 、海面高度  $h$  との関係は、

$$u = -\frac{g}{f} \frac{\partial}{\partial y} h \quad (1)$$

$$v = \frac{g}{f} \frac{\partial}{\partial x} h \quad (2)$$

と表せる。これが海洋における地衡流平衡の関係である。

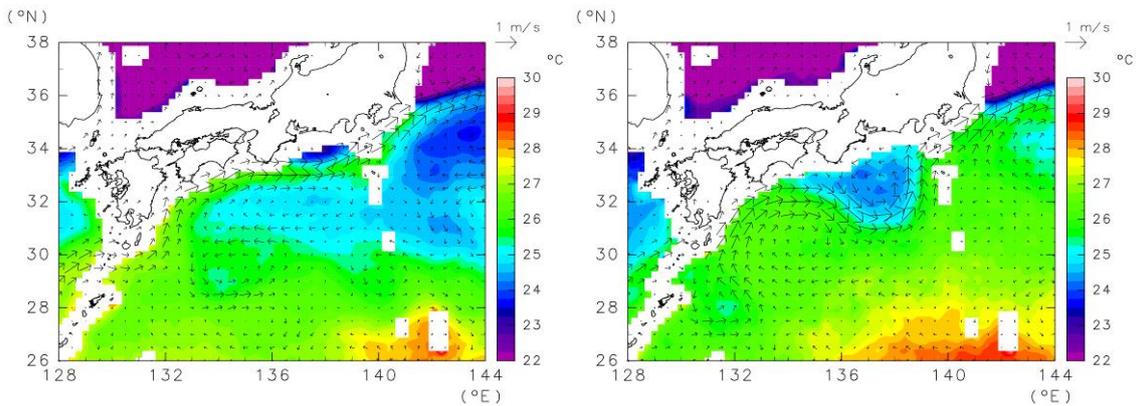


(Aviso データより作成)

日本付近の海流と海面高度 (2004 年の平均)

上の図をみると、海面高度の等値線に沿って海流が流れていて、地衡流平衡がよい近似で成り立っていることが確かめられる。

黒潮の流路、とくに**蛇行(meander)**の状態は一定ではない。流路の状態は、大雑把に言えば、大きく蛇行するとき (**大蛇行流路**) (large-meander path) と、ほとんど蛇行していないとき (**非大蛇行流路**) (non-large-meander path) に分けられる。



(Aviso データと TMSST データより作成)

非大蛇行流路 (2003 年 10 月) (左) と大蛇行流路 (2004 年 10 月) (右)

黒潮の変動は海面水温の変動にも密接に関連する。蛇行に伴い低気圧性（反時計回り）の渦が生じている海域では水温が低く、**冷水渦(cold eddy)**とよばれる。逆に、高気圧性（時計回り）の渦では水温が高く、**暖水渦(warm eddy)**とよばれる。このような黒潮の流路の変動は海洋物理学の重要なテーマである。黒潮の流路の変動には、陸地の分布や海底地形などが関係していると考えられている。

## 5. 2 渦度方程式

海洋の運動も、大気の場合と同様に、運動方程式を用いて記述することができる。水平流速( $u, v$ )に関する運動方程式において、鉛直移流を無視すると、

$$\frac{\partial}{\partial t} u + u \frac{\partial}{\partial x} u + v \frac{\partial}{\partial y} u = fv - \frac{\partial \Phi}{\partial x} + F_x \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} v + u \frac{\partial}{\partial x} v + v \frac{\partial}{\partial y} v = -fu - \frac{\partial \Phi}{\partial y} + F_y \quad (4)$$

となる。ここで、 $\Phi$  はジオポテンシャル、 $f$  はコリオリ係数である。また、 $F_x$ 、 $F_y$  は粘性や外力の効果を表す。(3)を  $y$  で偏微分し、(4)を  $x$  で偏微分すると、

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \right) \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \\ & = f \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{df}{dy} v - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \Phi + \frac{\partial}{\partial y} F_x \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \right) \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} \\ & = -f \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \Phi + \frac{\partial}{\partial x} F_y \end{aligned} \quad (6)$$

となって、(6)–(5)より、

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ & = -f \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{df}{dy} v + \left( \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (7)$$

が得られる。ここで、渦度（**相対渦度**(relative vorticity)） $\xi$ を

$$\xi = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (8)$$

と定義し、さらに、

$$\beta = \frac{df}{dy} \quad (9)$$

とすると、

$$\frac{D}{Dt} \xi + \beta v = -(f + \xi) \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \left( \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \quad (10)$$

となる。(10)の左辺第2項は**ベータ項**(beta term)とよばれ、**惑星渦度**(planetary vorticity)の南北移流の効果を表している。右辺第1項は**発散項**(divergent term)である。 $(f + \xi)$ は惑星渦度と相対渦度の和であり、**絶対渦度**(absolute vorticity)とよばれる。 $\left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)$ は水平発散である。右辺第2項は粘性や外力の効果を表す項である。このように渦度の時間変化を記述した方程式を**渦度方程式**(vorticity equation)という。

### 5. 3 非発散順圧渦度方程式

比較的大きなスケールでの海洋の運動においては水平流の発散成分は回転成分より小さい。そこで、渦度方程式(8)において、水平風が発散成分を含まない、つまり、 $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ と仮定する。このとき、水平風 $(u, v)$ は**流線関数**(stream function) $\Psi$ を用いて、

$$u = -\frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (11)$$

と表すことができる。実際に、(11)で定義された $(u, v)$ は常に $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ をみた

している。流線関数 $\Psi$ の等値線は、**流線**(streamline)（接線が流速ベクトルと平行になっているような曲線）と一致する。このとき、相対渦度 $\xi$ は、

$$\xi = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \Psi = \nabla^2 \Psi \quad (12)$$

と書けるので、渦度方程式(10)は

$$\frac{D}{Dt} \nabla^2 \Psi + \beta \frac{\partial}{\partial x} \Psi = \left( \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \quad (13)$$

と表せる。このように非発散という条件のもとで導かれた渦度方程式を**非発散順圧渦度方程式**(non-divergent barotropic vorticity equation)または**非発散渦度方程式**(non-divergent vorticity equation)という。

海洋物理学においては、方程式(13)を

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \Psi + J(\Psi, \nabla^2 \Psi) + \beta \frac{\partial}{\partial x} \Psi = \left( \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \quad (14)$$

のように表すことがある。ここで、 $J$ は**ヤコビアン**(Jacobian)と呼ばれ、

$$J(\phi, \psi) = \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (15)$$

と定義される。一般に、ヤコビアン $J(\phi, \psi)$ は、関数 $\phi(x, y)$ と $\psi(x, y)$ が同じ分布形をしていればゼロになる。渦度方程式(14)の場合、流線関数の等値線＝流線と、渦度の等値線が平行ではなく交わることによって渦度の移流が生じることを示している。

#### 5. 4 定常状態における渦度方程式

ここでは、 $F_x$ 、 $F_y$ を

$$\begin{aligned} F_x &= -\varepsilon u + \tau_x \\ F_y &= -\varepsilon v + \tau_y \end{aligned} \quad (16)$$

とおく。右辺第1項は粘性の効果を表す。 $\varepsilon$ は減衰係数であって、一定の時間スケールで流速が減少すると仮定している。一方、 $\vec{\tau} = (\tau_x, \tau_y)$ は大気から海洋に働く**風応力**(wind stress)の効果を表す。(13)に代入すると、

$$\frac{D}{Dt} \nabla^2 \Psi + \beta \frac{\partial}{\partial x} \Psi = -\varepsilon \nabla^2 \Psi + \left( \frac{\partial \tau_y}{\partial x} - \frac{\partial \tau_x}{\partial y} \right)$$

となる。ここで、

$$\text{curl } \vec{\tau} = \text{rot } \vec{\tau} = \frac{\partial \tau_y}{\partial x} - \frac{\partial \tau_x}{\partial y} \quad (17)$$

と表せば、

$$\frac{D}{Dt} \nabla^2 \Psi + \beta \frac{\partial}{\partial x} \Psi = -\varepsilon \nabla^2 \Psi + \text{curl } \vec{\tau} \quad (18)$$

と書ける。

海洋の運動に伴う渦度の時間変化を考えるとときには、相対渦度の移流の効果は小さいので、

$$\frac{D}{Dt} \nabla^2 \Psi \cong \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \Psi$$

として、

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \Psi + \beta \frac{\partial}{\partial x} \Psi = -\varepsilon \nabla^2 \Psi + \text{curl } \vec{\tau} \quad (19)$$

と表せる。さらに、定常状態を仮定して、

$$\varepsilon \nabla^2 \Psi + \beta \frac{\partial}{\partial x} \Psi - \text{curl } \vec{\tau} = 0 \quad (20)$$

と書ける。

ここで、東西方向の大きさが  $X$ 、南北方向の大きさが  $Y$  である長方形の海洋を考える。西岸を  $x=0$ 、東岸を  $x=X$ 、南岸を  $y=0$ 、北岸を  $y=Y$  とする。風応力を、

$$\tau_x = -\hat{F} \cos \pi \frac{y}{Y} \quad (\hat{F} > 0) \quad (21)$$

$$\tau_y = 0$$

とおく。これは、南岸で貿易風、北岸で偏西風が卓越しているような状況に対応する。このとき、(20)は、

$$\varepsilon \nabla^2 \Psi + \beta \frac{\partial}{\partial x} \Psi + \frac{\pi \hat{F}}{Y} \sin \pi \frac{y}{Y} = 0 \quad (22)$$

と書ける。境界条件としては、境界を横切る流れは存在しないことから、境界上の流線関数の値は一定であり、

$$\Psi = 0 \quad (x=0, x=X, y=0, y=Y) \quad (23)$$

と書ける。

ここで、流線関数  $\Psi$  を変数分離して、

$$\Psi = \hat{\Psi}(x) \sin \pi \frac{y}{Y} \quad (24)$$

とおくと、

$$\varepsilon \left( \frac{d^2}{dx^2} - \frac{\pi^2}{Y^2} \right) \hat{\Psi} + \beta \frac{d}{dx} \hat{\Psi} + \frac{\pi \hat{F}}{Y} = 0 \quad (25)$$

と書ける。境界条件は、

$$\hat{\Psi} = 0 \quad (x=0, x=X) \quad (26)$$

である。以下では、方程式(25)を境界条件(26)のもとで解いていく。

### 5. 5 内部領域における渦度収支

一般に、大きな空間スケールでの運動を考えると、粘性項の大きさは他の項に比べて小さいことが多い。そこで、内部領域（境界付近を除いた領域）では、(25)で粘性項の寄与が十分に小さいとすれば、近似的に  $\varepsilon = 0$  として、

$$\beta \frac{d}{dx} \hat{\Psi} + \frac{\pi \hat{F}}{Y} = 0 \quad (27)$$

と書ける。これを解くと、

$$\hat{\Psi} = -\frac{\pi \hat{F}}{\beta Y} x + C \quad (C \text{ は積分定数}) \quad (28)$$

となる。ここで、積分定数を  $C = \frac{\pi \hat{F}}{\beta Y} X$  として、

$$\hat{\Psi} = \frac{\pi \hat{F}}{\beta Y} (X - x) \quad (29)$$

と書いても(29)は(27)を満たす。このとき、 $\hat{\Psi}$  は東岸  $x = X$  で境界条件  $\hat{\Psi} = 0$  を満たしている。(29)より、南北流  $v$  は

$$v = \frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{d \hat{\Psi}}{dx} \sin \pi \frac{y}{Y} = -\frac{\pi \hat{F}}{\beta Y} \sin \pi \frac{y}{Y} \quad (30)$$

と求められる。これは内部領域では南向きの流れになっていることを意味する。風応力は負の渦度をもった高気圧性の循環を作ろうとするが、南向きの流れにともなうベータ効果は正の渦度（低気圧性の循環）を生成しようとしていて、両者の間でつりあいが保たれた状態になっている。このように、風応力の効果とベータ効果がつり合った状態を**スベルドラップ平衡**(Sverdrup balance)という。また、このとき生じている流れを**スベルドラップ輸送**(Sverdrup transport)という。

### 5. 6 境界領域における渦度収支

(30)で表される解は、西岸と東岸の両方で  $\hat{\Psi} = 0$  であるという境界条件(22)を

満たさない。物理的にいえば、全領域で南向きの流れが生じており、質量保存則を満たしていない。このような矛盾が生じるのは、粘性項の寄与が十分に小さいという仮定が必ずしも満たされていないからである。そこで、西岸または東岸の岸に近い部分では粘性の効果が卓越し、スベルドラップ平衡が成り立っていない領域が存在する可能性を考慮する。

まず、西岸に境界領域が形成される状況を考える。流線関数 $\hat{\Psi}$ を、(27)を満たす $\hat{\Psi}_I$ と、西岸付近だけで有意な値をもつ $\hat{\Psi}_B$ に分けて、

$$\hat{\Psi} = \hat{\Psi}_I + \hat{\Psi}_B \quad (31)$$

と書く。ただし、(29)より、

$$\hat{\Psi}_I = \frac{\pi\hat{F}}{\beta Y}(X-x) \quad (32)$$

である。このとき、(25)は、

$$\varepsilon \left( \frac{d^2}{dx^2} - \frac{\pi^2}{Y^2} \right) (\hat{\Psi}_I + \hat{\Psi}_B) + \beta \frac{d}{dx} (\hat{\Psi}_I + \hat{\Psi}_B) + \frac{\pi\hat{F}}{Y} = 0 \quad (33)$$

と書ける。一方で、(27)より、 $\hat{\Psi}_I$ に関して、

$$\beta \frac{d}{dx} \hat{\Psi}_I + \frac{\pi\hat{F}}{Y} = 0 \quad (34)$$

が成り立っている。したがって、(33)–(34)より、

$$\varepsilon \left( \frac{d^2}{dx^2} - \frac{\pi^2}{Y^2} \right) (\hat{\Psi}_I + \hat{\Psi}_B) + \beta \frac{d}{dx} \hat{\Psi}_B = 0 \quad (35)$$

が得られる。

西岸にできる境界領域の厚さのスケールを $D$  ( $D \ll X$ 、 $D \ll Y$ )として、 $x = Dx_*$ とおくと、

$$\varepsilon \left( \frac{1}{D^2} \frac{d^2}{dx_*^2} - \frac{\pi^2}{Y^2} \right) (\hat{\Psi}_I + \hat{\Psi}_B) + \beta \frac{1}{D} \frac{d}{dx_*} \hat{\Psi}_B = 0 \quad (36)$$

となる。 $D$ は $Y$ よりじゅうぶん小さいので、

$$\left( \frac{1}{D^2} \frac{d^2}{dx_*^2} - \frac{\pi^2}{Y^2} \right) (\hat{\Psi}_I + \hat{\Psi}_B) \cong \frac{1}{D^2} \frac{d^2}{dx_*^2} (\hat{\Psi}_I + \hat{\Psi}_B) \quad (37)$$

が成り立つ。さらに、 $\hat{\Psi}_I$ と $\hat{\Psi}_B$ の空間スケールを比較すると、 $\hat{\Psi}_B$ のほうが空間

的に細かい構造を持つので、

$$\frac{d^2}{dx_*^2} \hat{\Psi}_I \ll \frac{d^2}{dx_*^2} \hat{\Psi}_B \quad (38)$$

となって、

$$\frac{1}{D^2} \frac{d^2}{dx_*^2} (\hat{\Psi}_I + \hat{\Psi}_B) \cong \frac{1}{D^2} \frac{d^2}{dx_*^2} \hat{\Psi}_B \quad (39)$$

が成り立つ。したがって、(36)は、

$$\varepsilon \frac{1}{D^2} \frac{d^2}{dx_*^2} \hat{\Psi}_B + \beta \frac{1}{D} \frac{d}{dx_*} \hat{\Psi}_B = 0$$

$$\frac{d^2}{dx_*^2} \hat{\Psi}_B + \frac{\beta D}{\varepsilon} \frac{d}{dx_*} \hat{\Psi}_B = 0 \quad (40)$$

と書ける。ここで、境界領域の厚さのスケール  $D$  を

$$D = \frac{\varepsilon}{\beta} \quad (41)$$

と定める。ここで、 $D \ll X$ 、 $D \ll Y$  が成り立つ必要があるので、

$$\frac{\varepsilon}{\beta} \ll X, \quad \frac{\varepsilon}{\beta} \ll Y$$

でなければならないが、大きな空間スケールでの海洋の運動においては、この条件は実際に成り立っている。このとき、(40)は、

$$\frac{d^2}{dx_*^2} \hat{\Psi}_B + \frac{d}{dx_*} \hat{\Psi}_B = 0 \quad (42)$$

と書ける。境界条件を検討すると、まず、 $\hat{\Psi}$  ( $= \hat{\Psi}_I + \hat{\Psi}_B$ ) は西岸 ( $x=0$ 、 $x_*=0$ ) でゼロだから、

$$\hat{\Psi}_B = -\hat{\Psi}_I(x=0) = -\frac{\pi \hat{F}}{\beta Y} X \quad (x_* = 0) \quad (43)$$

である。また、 $\hat{\Psi}_B$  は西岸の境界領域のみで有意な値を持つから、

$$\hat{\Psi}_B \rightarrow 0 \quad (x_* \rightarrow +\infty) \quad (44)$$

である。(42)の解は一般には、

$$\hat{\Psi}_B = C_1 + C_2 \exp[-x_*] \quad (45)$$

と書けるが、境界条件(43)、(44)より、

$$\hat{\Psi}_B = -\frac{\pi\hat{F}}{\beta Y} X \exp[-x_*] = -\frac{\pi\hat{F}}{\beta Y} X \exp\left[-\frac{\beta}{\varepsilon} x\right] \quad (46)$$

である。

### 5.7 西岸境界流

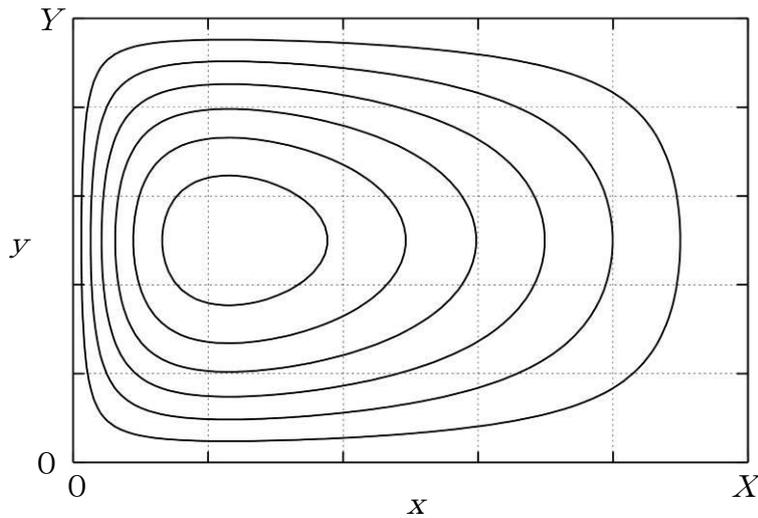
(32)、(46)より、(25)の解として、

$$\hat{\Psi} = \hat{\Psi}_I + \hat{\Psi}_B = \frac{\pi\hat{F}}{\beta Y} \left\{ -x + X \left( 1 - e^{-\frac{\beta}{\varepsilon} x} \right) \right\} \quad (47)$$

が得られる。実際に、

$$\frac{\varepsilon}{\beta} \ll X, \quad \frac{\varepsilon}{\beta} \ll Y$$

という条件のもとでは、(47)は、内部領域においても境界領域においても、(25)、(26)をよい近似で満たしている。



流線関数の分布 ( $D = \frac{1}{10} X$  の場合)

東岸に境界領域が形成されるとした場合、(25)、(26)を満たす解は得られない。

(47)は、内部領域では南向きの流れが生じるが、西岸付近に形成された境界領域では強い北向きの流れが生じることを示している。このようにして西岸に生じる強い流れを**西岸境界流**(western boundary current)という。また、西岸境界流を生じさせる仕組みを**西岸強化**(western intensification)という。西岸境界流の代表として、黒潮や**メキシコ湾流**(Gulf Stream)が挙げられる。

以上の理論は、**ストンメル** によって 1940 年代後半に提唱されたもの  
Henry M. Stommel 1920-1992

である。ストンメルの理論が発表される以前から黒潮やメキシコ湾流のような西岸境界流の存在は知られていたが、ストンメルによって西岸強化の仕組みがはじめて明らかになった。

一般に、このように風応力によって生じる海洋の循環を**風成循環**(wind-driven circulation)という。それに対して、水温や塩分の変動に伴う密度変化による対流として生じる循環を**熱塩循環**(thermohaline circulation)という。

**課題 5.1** 西岸ではなく東岸に境界領域が形成されるとした場合、(25)、(26)を満たす解が得られないことを示せ。

**問 5.1** 上記のストンメルの西岸強化に関して、境界領域の幅  $D$  を有効数字 2 けたで求めよ。 $\beta$  の値としては北緯  $30^\circ$  における値を用い、減衰係数  $\varepsilon$  は、 $\varepsilon = (8.64 \times 10^5)^{-1} / \text{s}$  とせよ (10 日で  $e^{-1}$  倍に減衰すると仮定する)。地球の半径は  $R = 6.37 \times 10^6 \text{ m}$ 、地球の自転角速度は  $\Omega = 7.29 \times 10^{-5} / \text{s}$  とする。

**問 5.2** 上記のストンメルの西岸強化において、スベルドラップ平衡が成り立っている場合の南北流  $v$  の中央部  $y = Y/2$  での値  $\hat{v}$  を有効数字 2 けたで求めよ。海面にはたらく風応力は(21)で与えられるものとする。ただし、 $Y = 4 \times 10^6 \text{ m}$ 、 $\hat{F} = 2 \times 10^{-7} \text{ m/s}^2$  ( $0.1 \text{ N/m}^2$  の風応力が水深 500 m までの海水に均等に作用すると仮定した場合の値) とする。 $\beta$  の値としては北緯  $30^\circ$  における値を用いよ。地球の半径は  $R = 6.37 \times 10^6 \text{ m}$ 、地球の自転角速度は  $\Omega = 7.29 \times 10^{-5} / \text{s}$  とする。